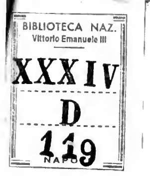
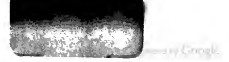






DIE

FORMENLEHRE

ODER

MATHEMATIK

VON

ROBERT GRASSMANN.

STETTIN, 1872.

DRUCK UND VERLAG VON R. GRASSMANN.

Die

WISSENSCHAFTSLEHRE

oder

Philofophie.

Von

Robert Grassmann.

Zweiter Ergänzungstheil.

Die Formenlehre.

Stettin, 1872.

Druck und Verlag von R. Grassmann.

Die

Formenlehre oder Mathematik.

Von

Robert Grassmann.



Stettin, 1872.

Druck und Verlag von R. Grassmann.

Vorwort.

Das vorliegende Werk soll eine wissenschaftliche Darstellung der Anfangszweige der Mathematik im strengsten Sinne des Wortes sein. Alle bisherigen Darstellungen der Mathematik setzen die Logik voraus, ohne sie abzuleiten und wissenschaftlich zu gestalten, fast alle versuchen die Schwierigkeiten des ersten Anfanges durch Redensarten und mit Hülfe von Trugschlüssen zu überwinden, und kommen erst im Fortgange der Darstellung zu einem streng wissenschaftlichen Wege.

Das vorliegende Werk will diese Fehler vermeiden. Es macht den Anspruch, auf streng wissenschaftlichem Wege ohne jeden Trugschluss sein Ziel zu erreichen, und bietet den Vortheil, dass es, weil auf geradem, so auch auf dem kürzesten Wege zum Ziele führt. Trotz der Vollständigkeit der Sätze, welche überdies meist zwiefach ausgedrückt sind, in Formeln und in Worten, trotz der Ausführlichkeit der Beweise, welche gleichfalls meist zwiefach gegeben sind, füllt jeder Zweig nur wenige Seiten und haben alle fünf Anfangszweige der Mathematik auf wenigen Bogen Platz gefunden.

Der wissenschaftlichen Darstellung jedes Zweiges ist eine Einleitung voraufgeschickt, welche den Leser vorbereiten und mit der Idee und dem Gange des Zweiges vertraut machen soll, und welche daher zur wissenschaftlichen Darstellung nicht gehört.

Die Sprache ist in dem Werke rein deutsch gehalten, alle Fremdwörter sind entfernt, die neu eingeführten Kunstwörter haben in Anmerkungen ihre Rechtfertigung gefunden. Und somit möge denn das kleine Werk dem Wohlwollen der geehrten Leser empfohlen sein.

Der Verfasser.

Einleitung in die Formenlehre.

1. Die Grösen und die Knüpfungen der Formenlehre und ihre Zeichen.

Die Formenlehre[1]) ſoll uns die Geſetze lehren des streng wissenschaftlichen Denkens. Sie darf nicht andere Geſetze des Denkens bereits vorausſetzen; denn ſonst würde jeder Fehler jener Geſetze auch die Formenlehre ſehlerhaft und unwissenschaftlich machen; ſie darf alſo auch namentlich nicht die Geſetze der Sprache vorausſetzen, nicht in den Geſetzen und Formen der Sprache ſich bewegen. Nur die Fähigkeit des Menschen zum Denken, nur die Möglichkeit eines streng wissenschaftlichen Denkens, mit einem Worte, nur erwachſene scharfe Denker ſetzt ſie voraus.

Kindern, welche noch nicht sprechen gelernt haben, lässt ſich die Formenlehre gar nicht vortragen. Das Bild der Ausenwelt ist in den Kindern noch dunkel und verschwimmend, die einzelnen Erscheinungen des Lebens ſind noch nicht bestimmt geschieden, die ähnlichen Dinge und die ähnlichen Thätigkeiten werden noch zuſammengefasst und verwechſelt, die verschiedensten Dinge noch mit demſelben Namen belegt. Auf einer ſo niedern Stufe des Denkvermögens lässt ſich natürlich eine wissenschaftlich strenge Form des Denkens nicht entfalten. Das Denkvermögen muss erst wachſen, muss ſich entwickeln und reifen, ehe es zum Verständnisse der vollen Schärfe befähigt wird.

Das Kind muss alſo erst sprechen lernen, muss Ding und Erscheinung, muss Eigenschaft und Thätigkeit unterscheiden, muss äuseren und inneren Zuſammenhang der Dinge und der Handlungen auffassen und darstellen, muss den Zuſammenhang einer längern Rede verfolgen und überſehen lernen, ehe es im Stande ist, dem strengen Gedankengange der Formenlehre zu folgen und die Grösen

---

[1]) Form ist entlehnt aus dem lateinischen Worte forma, und dies ist durch Verſetzung der Buchstaben aus dem griechischen morphé entlehnt. Das Wort stammt vom Urverb mar erweiche, darnach heist marva, ags mearva mürbe, weich, und ist morphé also die weiche, die Leibesgestalt, die schöne Gestalt, dann allgemein die Gestalt, die Form mit ganz bestimmtem, einwerthigem Umrisse.

und ihre Verknüpfungen mit der erforderlichen Schärfe zu unterscheiden und zu gebrauchen. Der Formenlehre muss alſo die Sprachlehre vorangehen.

Auch in der Schule geht der Formenlehre die Sprachlehre voran. Zwar beginnen sofort bei dem Eintritt in die Schule die der Formenlehre angehörigen Rechenübungen und Denkübungen; aber die strenge Form der Wissenschaft kann immer erst dann einſetzen, wenn bereits Sicherheit in dem Gebrauche der Muttersprache und ein Verständniss ihres Baues erlangt ist, d. h. in einer Oberklasse unſerer Mittelschulen.

Die Formenlehre ſoll als strenge Wissenschaft allgemein gültig ſein für alle Menschen jeglichen Volkes, jeder Sprache. Auch aus dieſem Grunde darf ſie nicht in den Formen einer einzelnen, eigenthümlichen, von andern Sprachen vielfach abweichenden Sprache ſich bewegen und entwickeln.

Die Formenlehre ſoll endlich die Geſetze streng wissenschaftlicher Verknüpfung lehren, bei welcher Verwechſelungen der Begriffe, bei welcher Trugschlüsse unmöglich ſind. Die Grösen, welche in der Formenlehre verknüpft werden, dürfen daher nur einen und nicht mehre Werthe beſitzen, und ebenſo die Verknüpfungen nur einen und nicht mehre Werthe.

Jedes Wort in der Sprache dient aber zur Bezeichnung vieler Dinge und hat daher mehrfachen Sinn, welcher zu Verwechselungen und Trugschlüssen Anlass giebt, und auf den die ganze Kunst der alten Sophistik gegründet ward; jeder Begriff im Reiche der Gedanken hat einen mehrfachen Werth, ja der Begriff wechſelt während und durch die Arbeit des Denkens und verändert alſo im Laufe der Unterſuchung ſeinen Werth; jedes Ding endlich der Ausenwelt ist dem Wechſel unterworſen, ändert sich und erhält alſo gleichfalls mehrfachen Werth. Und ebenſo die Beziehungen und Verknüpfungen der Worte, Begriffe und Dinge. Auch die Sätze, die Gedanken und die Beziehungen der Dinge haben mehrfache Werthe, können verschieden aufgefasst werden, werden von je zwei Menschen verschieden aufgefasst und erzeugen eben dadurch die Mannigfaltigkeit der von einander abweichenden Anſichten.

Die strenge Formenlehre, in welcher jede Gröse nur einen und nicht mehre Werthe haben darf, hat es weder mit dieſen wechſelnden Dingen und Begriffen, noch mit den Worten zu thun, welche stets mehre Werthe beſitzen und kann auch aus dieſem Grunde nicht in den Formen und nach den Geſetzen der Sprache ſich entwickeln. Die Formenlehre muss ſich vielmehr ſämmtliche

Grösen, welche ſie verknüpfen will, ſelbst erzeugen, muss ebenſo die Geſetze ihrer Verknüpfung ſetzen und ſo genau bestimmen, dass jede nur einen Werth beſitzt und über den Werth derſelben kein Zweifel statt finden kann und muss endlich für jede Gröse und jede Verknüpfung ein eignes Zeichen festſetzen, welches gleichfalls nur einen Werth beſitzt und Verwechſelungen unmöglich macht.

Andrerſeits muss, da die Formenlehre die Geſetze für jedes Denken entwickeln ſoll, jedes, was Gegenstand des Denkens ist oder werden kann, auch Gegenstand der Formenlehre werden können und ebenſo jede Verknüpfung des Denkens auch als eine Verknüpfung der Formenlehre aufgefasst werden können. Hieraus ergeben ſich die ersten Festſetzungen über die Grösen und über die Knüpfungen der Formenlehre. Es ſind folgende:

Grösenlehre heist die Wissenschaft von der Knüpfung der Grösen.

Gröse heist jedes, was Gegenstand des Denkens ist oder werden kann, ſofern es nur einen und nicht mehre Werthe hat.

Gleich heisen zwei Grösen, wenn man in jeder Knüpfung der Formenlehre die eine statt der andern ohne Aenderung des Werthes setzen kann.

Ungleich heisen zwei Grösen, wenn man in keiner Knüpfung der Formenlehre die eine statt der andern ohne Aendrung des Werthes ſetzen kann.

Eine Gröse kann nie einer andern Gröse gleich und zugleich ungleich ſein, ſondern ſie muss der andern Gröse entweder gleich oder ungleich ſein; denn jede Gröse darf nur einen und nicht mehre Werthe haben. Hierin liegt der weſentlichste Unterschied von den Begriffen des gewöhnlichen Denkens. Denn beim gewöhnlichen Denken kann jeder Begriff vielen andern Begriffen in gewissen Beziehungen gleich, in andern ungleich geſetzt werden und wird daher ohne scharfe Unterscheidung bald gleich, bald verschieden genannt, (ſo z. B. ist Hund und Hund gleich und doch wieder verschieden, ſo Liebe und Liebe, ſo Glück und Glück u. s. w.); dagegen ist in der Formenlehre jede Gröse nur einwerthig und wenn einer zweiten gleich, ſo nicht ungleich, wenn der zweiten ungleich, ſo nicht gleich.

Die Grösen, welche verknüpft werden ſollen, ohne dass ſie ſelbst durch Knüpfung von Grösen entstanden ſind, und welche alſo ursprünglich geſetzt ſind, heisen jede ein Stift oder ein Element.

Die Buchstaben ſind die Zeichen der Grösen und zwar ſind in der Formenlehre die Buchstaben $(e_1, e_2, e_3 \cdots)$ die Zeichen der

Stifte oder Elemente, die Buchstaben (a, b, c···) die Zeichen beliebiger Grösen.

Derſelbe Buchstabe bezeichnet in derſelben Nummer der Formenlehre stets nur eine und dieſelbe Gröse und hat alſo nur einen Werth. Im Uebrigen kann jeder Buchstabe jede beliebige Gröse bezeichnen. Jeder Satz, welcher für einen Buchstaben bewieſen ist, gilt mithin für alle Grösen, welche der Buchstabe bezeichnen kann, d. h. für jede beliebige Gröse. Soll ein Buchstabe nur eine bestimmte Art von Grösen bezeichnen, ſo muss dies in der Nummer ausdrücklich geſagt und genau und unzweifelhaft festgestellt werden, welche Grösen dadurch bezeichnet werden ſollen, ſonst würde der Satz für alle beliebigen Grösen gelten.

Knüpfung zweier Grösen heist jede Zuſammenstellung oder Knüpfung dieſer Grösen, welche dem Geiste des Menschen möglich ist, ſofern ſie nur einen und nicht mehre Werthe hat.

Das, was durch die Knüpfung zweier Grösen entsteht, ist wieder eine Gröse, da es Gegenstand des Denkens ist und nur einen und nicht mehre Werthe hat, und heist das **Ergebniss der Knüpfung** oder kurz das **Geſammt**.

Die **Knüpfungszeichen** ſind die Zeichen der Knüpfung und werden geleſen „geknüpft mit". Dasſelbe Knüpfungszeichen bezeichnet in derſelben Nummer der Formenlehre stets eine und dieſelbe Knüpfung. Im Uebrigen kann jedes Knüpfungszeichen jede beliebige Knüpfung bezeichnen. Jeder Satz, welcher für ein Knüpfungszeichen bewieſen ist, gilt mithin für alle Knüpfungen, welche dies Knüpfungszeichen bezeichnen kann. Soll ein Knüpfungszeichen nur eine bestimmte Art von Knüpfungen bezeichnen, ſo muss dies bei ſeiner Einführung ausdrücklich geſagt und genau und unzweifelhaft festgestellt werden, welche Knüpfungen dadurch bezeichnet werden ſollen.

Das allgemeine Zeichen der Knüpfung, welches jede beliebige Knüpfung bezeichnen kann, ist der Kreis „∘", welcher zwischen die zu knüpfenden Grösen geſetzt wird (z. B. $a \circ b$ geleſen a geknüpft mit b, oder kurz a mit b). Beſondere Zeichen der Knüpfung ſind das **Gleichheitszeichen** $=$ und das **Ungleichheitszeichen** $\gtrless$; das erstere bezeichnet, dass die geknüpften Grösen gleich ſind (z. B. $a = b$ geleſen a gleich b), das zweite bezeichnet, dass die verknüpften Grösen ungleich ſind (z. B. $a \gtrless b$, geleſen a ungleich b.) Die Knüpfung zweier Grösen durch das Gleichheitszeichen heist eine **Gleichung**.

Jede Grösenknüpfung findet nur zwischen zwei Grösen statt.

Sollen mehre Grösen z. B. drei mit einander geknüpft werden, so muss zuerst bestimmt werden, welche zwei Grösen zunächst geknüpft werden sollen, das Ergebniss dieser Knüpfung wird dann mit der dritten Gröse geknüpft u. s. w., so dass jedesmal nur zwei Grösen geknüpft werden.

Die Klammer ( ) ist das Zeichen, dass die in die Klammer eingeschlossenen Grösen zuerst zu einem Gesammte geknüpft werden sollen, ehe dies mit der Gröse auser der Klammer geknüpft werden darf (z. B. a∘(b∘c) gelesen „a mit Klammer: b mit c, Klammer geschlossen" bezeichnet, dass zuerst b mit c geknüpft werden soll und dass das Gesammt demnächst mit a geknüpft werden soll).

In jeder Klammer dürfen nur 2 Grösen stehen, sind mehre Grösen in derselben enthalten, so müssen alle bis auf eine in eine andere Klammer geschlossen sein und müssen dann alle Grösen in dieser andern Klammer zuerst zu einem Gesammte geknüpft sein, ehe das Gesammt dieser Klammer mit der einen auser dieser Klammer stehenden Gröse geknüpft werden kann. Sind demnach n Grösen zu knüpfen, so sind in dem Ausdrucke n—2 Klammern erforderlich, sofern kein Zweifel über die Reihenfolge der Knüpfung statt finden soll.

Eine Reihe von Grösen fortschreitend knüpfen heist in der Reihe zuerst die erste mit der zweiten knüpfen, das Ergebniss dieser Knüpfung mit der dritten knüpfen und sofort jedesmal das Ergebniss der Knüpfung aller frühern Grösen mit der nächstfolgenden knüpfen. Soweit mehre Grösen fortschreitend geknüpft werden, können die Klammern fortgelassen werden, da über die Folge der Knüpfung kein Zweifel statt finden kann. Die Klammern müssen nur dort stehen, wo von der fortschreitenden Knüpfung abgewichen wird, können aber auch in die fortschreitende Knüpfung wieder eingeführt werden. Eine Knüpfung mehrer Grösen, welche eine Gröse a enthält, heist eine Formel der Gröse a.

2. Der Gang und die Beweisart der Formenlehre.

Die Formenlehre beginnt also mit der Setzung der Stifte (Elemente) und mit deren Knüpfung zu Grösen oder zu Formeln. Alle diese Setzungen und Knüpfungen haben nur einen Werth und unterscheiden sich dadurch wesentlich von jedem Satze und Worte der Sprache.

Freilich kann auch die Formenlehre der Sprache insoweit nicht

entbehren, als die Menschen sich darüber mit sich selbst und mit andern verständigen müssen, was unter den Zeichen der Grösen und Knüpfungen zu verstehen sei, und diese Verständigung nur in der Sprache geschehen kann. Aber diese Verständigung gehört nur der Einleitung in die Formenlehre an, nicht der Entwicklung selbst, diese beginnt vielmehr allein mit dem Setzen und Knüpfen von Grösen.

Der Gang der Formenlehre ist dann der, dass von den einfachsten Knüpfungen oder Formeln der Grösen bis zu den verwickelsten vorgeschritten und untersucht wird, welche dieser Formeln einander gleich sind.

Eine Formel wird aufgestellt, zu ihr eine gleiche gesucht, für diese wieder eine gleiche gesucht und eingeführt und sofort bis die Formel gefunden ist, von der wir beweisen wollen, dass sie der ersten gleich ist. Der Gang bewegt sich also allein in Setzung von Grösen und deren Knüpfung und in Umwandlung dieser Knüpfungen in andersgestaltete aber gleiche Knüpfungen oder Formeln.

Jede solche Gleichung zwischen zwei Formeln, welche schliesslich gewonnen wird, bildet dann das Ergebniss der Betrachtung und lässt sich in einem Satze, dem Lehrsatze, aussprechen oder in Worte kleiden. Aber dieser in Worten ausgesprochene Satz ist nur eine Uebersetzung der in Formeln ausgedrückten Gleichung und darf nichts anderes aussprechen, als was in der Gleichung durch Formeln bezeichnet war. Er geht nur neben der Formel her, kann diese weder ersetzen, noch überflüssig machen. Auch der Beweis kann ebenso wie der Satz in Worten dargestellt werden; aber diese Worte geben wieder nur eine Uebersetzung der Formelentwicklung in die Sprache.

Es scheint hiernach, als sei die ganze Aufstellung der Sätze in Worten, die Entwicklung des Beweises in Worten unnöthig. Dem ist aber nicht so. Alle Mittheilung der Gedanken geschieht in der Sprache, ebenso alles Denken: Soll also die Formenlehre mitgetheilt, soll über die Bedeutung einer Formel verhandelt oder auch nur gedacht werden, so muss dies in der Sprache geschehen; soll andrerseits die Formenlehre auf die Gegenstände des Denkens und der Sprache angewandt werden, so muss es möglich sein, die Formel in die Sprache zu übersetzen. Die Uebersetzung der Formel in die Sprache unsres Volkes ist daher eine wesentliche Uebung, namentlich für den Anfänger und muss bei jedem Beweise geschehen. Der Schüler muss, während er die Formeln hinschreibt und entwickelt, die Sätze anführen und aussprechen, nach denen die

Umwandlung der Formel erfolgt, und muss geübt werden, mit Leichtigkeit jede Formel in Worte und umgekehrt jeden Satz in Formeln zu übertragen. Nur wenn er diefe Uebung erwirbt, wird er der Sätze vollkommen Herr und bewusst werden und fie stets in feinen Gedanken anwenden können.

Die Sprache felbst aber gewinnt durch diefe Ueberfetzung der Formeln in die Sprache eine ganz neue Schärfe und Bestimmtheit. Jede Erklärung, d. h. jede Feststellung, was unter der Gröse oder ihrer Knüpfung verstanden werden foll, darf nur einen und nicht mehre Werthe zulassen. Ebenfo jeder Satz oder Lehrfatz, welcher ausgesprochen wird, darf nur einen und nicht mehre Werthe haben, da er genau das in Worten ausfagen muss, was die Gleichung in Formeln enthält, welche gleichfalls nur einen Werth zulassen. Ebenfo endlich jedes Aussprechen einer Aufgabe, ebenfo jede Auflöfung und jeder Beweis in Worten. Die Ueberfetzung der Formenlehre in Worte bietet alfo eine reiche und höchst bildende Uebung. Immer aber findet der eigentliche Fortschritt der Formenlehre doch nur in Formeln statt; ein Beweis, welcher blos in Worten fich bewegt, und nicht in Formeln wiedergegeben werden kann, ist in der Formenlehre fehlerhaft und trügerisch, ein Lehrbuch der Formenlehre, welches in Worten beweifen will statt in Formeln, ist eine Verkehrtheit und beweist nur die Unwissenschaftlichkeit des Verfassers.

3. Die fünf Zweige der Formenlehre.

Die Formenlehre oder die Mathematik zerfällt in fünf Zweige, einen allgemeinen Zweig, die Grösenlehre, und vier befondere Zweige.

1) Die Grösenlehre, der erste oder der allgemeine Zweig der Formenlehre, lehrt uns die Knüpfungen der Grösen kennen, welche allen Zweigen der Formenlehre gemeinfam find, er entwickelt die Gefetze der Gleichheit, der Addition oder Fügung, der Multiplication oder Webung und der Potenzirung oder Höhung.

Die vier besonderen Zweige der Formenlehre.

Aus der Grösenlehre ergeben fich demnächst die vier befonderen Zweige der Formenlehre durch Einführung neuer Bedingungen. Die Hauptfrage für diefe Bedingungen ist, was entsteht durch das Knüpfen gleicher Stifte (Elemente). Es kann die Knüpfung $e \circ e$

entweder gleich e ſein, oder ungleich e, findet das erstere statt, ſo ist auch das Geſammt aus der Knüpfung beliebig vieler e wieder dasſelbe e, findet das zweite statt, ſo giebt die Knüpfung der gleichen e stets neue und neue Grösen.

Wir nennen die erstere Knüpfung, welche der Knüpfung unſerer Vorstellungen im Innern des Kopfes entspricht, indem sich zwei gleiche Vorstellungen zu einer gemeinſamen Vorstellung verknüpfen, die innere, dagegen die zweite, welche der Knüpfung der Dinge in der Ausenwelt entspricht, indem zwei gleiche Dinge nie zu einem werden, ſondern zwei im Raume bleibeu, und je mehr Dinge hinzukommen, immer mehr Stellen im Raume erfüllen, die äusere.

Die innere und die äusere Knüpfung kann aber ebenſo im Fügen oder Addiren, als im Weben oder Multipliciren eintreten, demnach giebt es alſo vier verschiedene Arten der Knüpfung. Bei der innern Fügung oder Addition bleibt jedes Stift, ſoweit man es auch zu demſelben Stifte fügt, immer dies Stift ohne jede Aendrung des Werthes. Wir haben es hier alſo allein mit den Vorstellungen unſeres Kopfes zu thun, haben eine Knüpfung von Vorstellungen oder Begriffen. Bei der äusern Fügung oder Addition dagegen giebt jedes neue Stift, welches zu einer Gröse gefügt wird, welche aus Knüpfung dieſes Stiftes mit ſich ſelbst erzeugt ist, stets eine neue Gröse, ohne mit einem der gleichen Stifte in ein Stift zuſammenzufallen, wir haben es hier alſo allein mit den Dingen der Ausenwelt zu thun.

Bei der innern Webung oder Multiplication ist die Beziehungsweiſe der Stifte eine innere. Jedes Stift giebt, auf ein gleiches Stift bezogen, nur wieder dasſelbe Stift, wie auch eine Vorstellung, auf die gleiche Vorstellung, ein Begriff auf den gleichen Begriff bezogen, nur wieder dieſelbe Vorstellung, denſelben Begriff giebt. Dagegen bei der äusern Webung oder Multiplication ist die Beziehungsweiſe der Stifte eine äusere. Jedes Stift giebt, auf ein gleiches Stift bezogen, ein neues Stift, wie auch ein Ding auf ein gleiches Ding bezogen, nicht wieder dasſelbe Ding, ſondern eine neue Beziehung, ein neues Ding ergiebt. Innere und äusere Webung verhalten ſich alſo wie geistige Beziehung und äuserliche Beziehung und bilden den zweiten Gegenſatz unter den vier Zweigen der Formenlehre.

Wir können nunmehr zur Aufstellung der vier beſonderen Zweige der Formenlehre ſelbst übergehen. Die ersten beiden ſind die, für welche innere Fügung gilt, die letzten beiden die, für



welche äusere Fügung gilt. In jeder von beiden Abtheilungen aber ist der erste Zweig der, für welchen innere Webung, der zweite der, für welchen äusere Webung gilt.

2) Der erste beſondere Zweig der Formenlehre, der einfachste und zugleich innerlichste, ist die Begriffslehre oder Logik, in welcher die Begriffe des Innern oder des Geistes auf innerliche begriffliche Weiſe bestimmt werden. Es gilt für dieſelbe nicht nur die innere Fügung $e + e = e$, ſondern auch die innere Webung $ee = e$, während das Zeug oder Produkt verschiedner Stifte gleich Null geſetzt wird $e_1 e_2 = 0$.

3) Der zweite beſondere Zweig der Formenlehre, der ordnende für die Begriffe des Innern, ist die Bindelehre oder Combinationslehre, in welcher die Begriffe in äuserlicher Weiſe hingestellt, geordnet und geknüpft werden. Es gilt für dieſelbe innere Fügung $e + e = e$; dagegen die äusere Webung $ee \gtrless e$. Die Betrachtung wird in dieſem Zweige eine weſentlich neue, eine Reihe neuer Webungen oder Multiplicationen treten auf. Entweder ſetzen wir $ee = 0$ Gebinde ohne Wiederholung, oder $ee \gtrless 0$ mit Wiederholung, entweder ſetzen wir $e_1 e_2 = e_2 e_1$ das Geschiede (Complexio) oder $e_1 e_2 \gtrless e_2 e_1$ das Geänder (Variatio).

4) der dritte Zweig der Formenlehre, der einfachste für die Erfassung der Ausenwelt, ist die Zahlenlehre oder Arithmetik, in welcher die Dinge der Ausenwelt, ohne auf ihre Verschiedenheit Acht zu geben, als gleich gezählt oder gefügt werden, aber die Beziehung auf die Ausendinge nur eine innere begriffliche ist, bei welcher nicht zwei äusere Stifte auf einander bezogen, ſondern nur die innerlich gebildete Zahl auf das äusere Stift bezogen wird. Es gilt für dieſelbe die äusere Fügung, wo $e + e \gtrless e$ und bei der fortschreitenden Fügung des gleichen Stiftes e jede folgende Zahl von allen früheren verschieden ist; dagegen gilt die innere Webung $1 \times 1 = 1$ und $1 \times e = e$.

5) Der letzte Theil der Formenlehre, zugleich der verwickeltste und äuserlichste, ist die Ausenlehre, in welcher die Dinge der Ausenwelt theils als gleich, theils als ungleich aufgefasst, die gleichen gezählt, die ungleichen gefügt werden, und auch die Beziehungen der Dinge als verschieden von den Dingen äuserlich hingestellt werden. Es entspricht dieſer Zweig am meisten der Ausenwelt und ihren Verhältnissen. Die Fügung ist eine äusere $e + e \gtrless e$, ebenſo die Webung eine äusere $ee \gtrless e$. Auch hier ist entweder $ee = 0$ Zeuge ohne Wiederholung, oder $ee \gtrless 0$ Zeuge

mit Wiederholung und ist entweder $e_1 e_2 = e_2 e_1$ die Verwebung oder $e_1 e_2 \gtrless e_2 e_1$ die Einwebung.

Für alle 4 Zweige kam es darauf an, eine streng wissenschaftliche Form zu finden. In Jahre langer gemeinfamer Arbeit haben mein Bruder Hermann und ich dies Ziel verfolgt und glauben wir das gesteckte Ziel erreicht und wissenschaftliche Strenge gepart mit elementarer Einfachheit in die Anfangszweige der Mathematik eingeführt zu haben. Doch hierüber enthalte ich mich billig jedes Urtheils und lasse die Sache für fich felbst reden. Die Arithmetik und die Ausdehnungslehre des Bruders, wie das vorliegende Werk von mir find Beispiele der streng wissenschaftlichen Form, welche wir fordern.

Die Grösenlehre.

Erstes Buch

der

Formenlehre oder Mathematik.

Von

Robert Grassmann.

Stettin, 1872.

Druck und Verlag von R. Grassmann.

Einleitung in die Grösenlehre.

Die Grösenlehre oder der allgemeine Zweig der Formenlehre ist eine ganz junge Wissenschaft. Leibnitz hat in einem Briefe an den Professor Vagetins in Giessen 1696 nach Chr. die Idee derſelben zuerst angeregt. Er nennt ſie in dieſem Briefe bereits Grösenlehre[1]) (scientia de magnitudine), welcher Name, da er der Sache ganz entspricht, beizubehalten ist, und rühmt von ihr, dass ſie einfache oder vielmehr einwerthige Begriffe, Sätze, Schlüsse und Wege habe. „Die einwerthigen Begriffe", ſagt er in dem Briefe (Opera omnia ed. Dutens 1768 Th. 3 S. 338), „ſind die Grösen und Beziehungen und aus ihnen zuſammengeſetzt die Formeln. Die einwerthigen Sätze ſind die Gleichungen und die Sätze vom Grösern und Kleinern. Die Schlüsse oder die Knüpfungen ſind Addition, Multiplication u. ſ. w. Der Weg der Entwicklung endlich zeigt, wie der Beweis eines Satzes oder die Auflöſung einer Aufgabe anzugreifen ſei. Die Idee dieſer Wissenschaft, wenn ſie von einem geschickten Manne gut ausgeführt würde, würde uns den allgemeinen Zweig der Formenlehre als einen leichten und ſichern Zweig der Mathematik darstellen." Soweit Leibnitz.

Es giebt eine Reihe von Geſetzen und Knüpfungen, welche allen Zweigen der Formenlehre gemeinſam ſind, ſo die Geſetze der Gleichheit, ſo die Geſetze der Addition oder Fügung, ſo die der Multiplication oder Webung. Alle dieſe Geſetze kommen in der Begriffslehre (Logik), wie in der Zahlenlehre (Arithmetik), in der Bindelehre (Combinationslehre), wie in der Ausenlehre zur Geltung und Anwendung. Es ist unwissenschaftlich, dieſelben Geſetze viermal in den einzelnen Zweigen abzuleiten, oder wohl gar ohne Ableitung und ohne Beweis vorauszuſetzen, statt ſie einmal in einem

[1]) Gröse stammt vom Urverb ghar, sskr. ghar, glänze, leuchte. Von dieſem Stamme wird gr. chlóē junge Saat, lat. germen der Schössling, gramen, goth. gras, das Gras, abgeleitet und nach ſeiner leuchtenden Farbe benannt und lat. grandis, agſ. engl. great, gros abgeleitet und wegen ſeiner hervorleuchtenden, erhabenen Gestalt benannt.

allgemeinen Zweige der Formenlehre wissenschaftlich abzuleiten und zu beweisen. Die Grösenlehre muss also als allgemeiner Zweig den einzelnen Zweigen der Formenlehre vorangehen. Sie bildet gleichsam den Stamm, der die anderen Zweige trägt.

Aber Addition oder Fügung und Multiplication oder Webung bieten auser der Gleichsetzung keineswegs die einzigen und allgemeinsten Knüpfungsweisen der Grösenlehre dar. Beiden gemeinsam ist nämlich das Gesetz der Klammerauflösung oder der Einigung einerseits, das der Vertauschung andrerseits. So umfasst das Klammer-Gesetz oder das Gesetz der Einigung $a\circ(b\circ c) = a\circ b\circ c$ das Gesetz der Fügung oder Addition $a + (b + c) = a + b + c$ und das der Multiplication oder Webung $a\,(b\,c) = a\,b\,c$, so umfasst das Vertauschungs-Gesetz $a\circ b = b\circ a$, das Gesetz der Addition $a + b = b + a$ und das der Multiplication $a\,b = b\,a$. Diese beiden Gesetze können und müssen daher zuvor entwickelt werden, ehe von Fügung und Webung die Rede sein darf.

Das Gesetz der Einigung kann überdies für sich gelten, ohne dass das Gesetz der Vertauschung gilt und giebt es eine grose Zahl von Rechnungen, in denen nur Einigung, nicht aber Vertauschung gilt, das Gesetz der Einigung oder das Klammergesetz muss also zuerst für sich abgeleitet werden, ehe von Vertauschung die Rede sein kann.

Hienach ist die **Reihenfolge** in der Grösenlehre folgende: Nach den allgemeinen Erklärungen folgen die Sätze über die Gleichheit, Abschnitt 2, demnächst die Erklärung der Anreihung, für welche weder Einigung noch Vertauschung gilt, Abschnitt 3, dann die Sätze über die Einigung der Grösen ohne Vertauschung, Abschnitt 4, die Sätze über die Vertauschung, Abschnitt 5. Nun erst werden die verschiedenen Grade der Knüpfung unterschieden. In Abschnitt 6 folgen die Sätze über die Beziehung, für welche das Gesetz gilt $(a\circ b)\,c = ac\circ bc$, diese kann überall eintreten, sofern für den niedern Grad Einigung gilt. Gilt auf beiden Seiten dieselbe Knüpfung $\circ$, so heist die Beziehung eine einfache, gelten verschiedene Knüpfungen $\circ$ und $\odot$, so dass $(a\circ b)\,c = ac\odot bc$ ist, so heist die Beziehung eine Doppelbeziehung.

Nun erst folgt in Abschnitt 7 der niedrigste Grad der Knüpfung, die Fügung oder Addition, demnächst in Abschnitt 8 der mittlere Grad der Knüpfung, die Webung oder Multiplication, endlich in Abschnitt 8 der höchste Grad, die Höhung oder Potenzirung.

Was die **Form der Entwicklung** und der **Beweise** betrifft,

so darf offenbar ein begrifflicher oder logischer Schluss und Beweis nicht angewandt werden, da ja die Begriffslehre oder Logik noch nicht entwickelt und bewiesen ist, sondern erst nach der Grösenlehre entwickelt werden soll. Wir machten uns, wollten wir dennoch solche logischen Beweise anwenden, eines Kreisschlusses oder eines Trugschlusses schuldig, indem wir bei den Beweisen schon voraussetzten, was später erst bewiesen werden soll.

Glücklicher Weise bedürfen wir aber auch des begrifflichen oder logischen Schlusses gar nicht für unsre Beweise der Grösenlehre. In dem begrifflichen Schlusse wird nämlich nur von einem Begriffe, der weiter ist, auf einen Begriff geschlossen, der ihm untergeordnet oder enger ist. Bei den Beweisen der Grösenlehre dagegen haben wir es nicht mit untergeordneten, sondern allein mit gleichen und ungleichen Grösen zu thun. Der begriffliche oder logische Schluss findet also in der Grösenlehre gar keine Anwendung. Dasselbe ergiebt sich auch daraus, dass alle Beweise der Formenlehre in Formeln geführt werden können und müssen und dass die Uebersetzung der Beweise in die Sprache nur eine Uebertragung ist in das Gebiet des gewöhnlichen Denkens, welches der strengen Formenlehre an sich fremd ist.

Bei den Sätzen von der Gleichheit geht nun die Entwicklung von der Erklärung aus, dass zwei Grösen nur dann gleich genannt werden, wenn man in jeder Knüpfung der Formenlehre die eine statt der andern ohne Aendrung des Werthes setzen kann. Bewiesen wird, dass, wenn in einer Reihe von Grösen jede vorhergehende der nächstfolgenden gleich ist, auch die erste jeder folgenden gleich ist, indem dann die erste der zweiten gleich ist, statt der zweiten aber die gleiche dritte, statt dieser die gleiche nächstfolgende und sofort jede folgende gesetzt werden kann, so dass die erste jeder folgenden gleich ist. Es ist dies das erste Gesetz der Gleichheit oder der Satz des geraden oder directen Beweises. Bewiesen wird ferner, dass, wenn in einer Reihe von Grösen eine Gleichung für die erste Gröse der Reihe gilt und sie auserdem, sobald sie für eine beliebige Gröse der Reihe gilt, auch für die nächstfolgende Gröse der Reihe gilt, dass sie dann auch allgemein für alle Grösen der Reihe gilt. Es ist dies das zweite Gesetz der Gleichheit oder der Satz des fortleitenden oder inductorischen Beweises. Diese beiden Arten von Beweisen sind der allgemeinen Formenlehre allein angehörig. In der Begriffslehre werden wir auserdem noch den ungeraden oder indirecten Beweis kennen lernen, der in den späteren Zweigen der Formenlehre und

in den Anwendungen der Formenlehre, namentlich in der Raumlehre, häufig gebraucht wird.

Bei den **Sätzen von der Einigung der Grösen** finden nun dieſe Formen des Beweiſes ihre erste Anwendung. Der Abschnitt beginnt mit der Erklärung der Einigung. Wollten wir in dieſer Erklärung ſogleich das ganze Geſetz der Einigung vorausſetzen und die Einigung in der Weiſe erklären: Einigung ist die Knüpfung der Grösen, bei welcher man jede Klammer beliebig ſetzen oder weglassen kann, ſo wäre dieſe Erklärung zu weit und deshalb unwissenschaftlich, indem in der Erklärung als Erklärung ausgesprochen wäre, was ſich aus einer viel engeren Erklärung ableiten lässt, und daher auch gar nicht erkannt würde, welche Vorausſetzung nothwendig ist, damit das ganze Geſetz der Einigung stattfinde. Eine gute Erklärung aber darf nichts weiter festſetzen, als dieſe für die Sache unumgänglich nothwendige Vorausſetzung.

Gegeben ſind uns die Stifte oder Elemente, welche noch nicht geknüpft ſind. Festgeſetzt ist bereits, dass wir in der fortschreitenden Knüpfung der Stifte die Klammern fortlassen können, alſo dass $(a\circ e_1)\circ e_2 = a\circ e_1\circ e_2$ ist. Festgeſetzt muss noch werden, was gelten ſoll, wenn mit einer Gröse a das Geſammt einer Gröse b und eines Stifts geknüpft werden ſoll, z. B. $a\circ(b\circ e)$. Darf hier die Klammer nicht weggelassen werden, ſo ist eine Weglassung der Klammern auserhalb der fortschreitenden Knüpfung überhaupt nicht möglich: darf ſie dagegen weggelassen werden, ist alſo $a\circ(b\circ e) = a\circ b\circ e$, ſo kann jede Klammer weggelassen werden und lässt ſich daraus das ganze Geſetz der Einigung ableiten. Zunächst gilt dann nämlich $a\circ(e_1\circ e_2) = a\circ e_1\circ e_2$. Ferner gilt $a\circ(e_1\circ e_2\circ e_3) = a\circ(e_1\circ e_2)\circ e_3 = a\circ e_1\circ e_2\circ e_3$ u. ſ. w.

Die Erklärung: Eine Knüpfung heist Einigung, wenn $a\circ(b\circ e) = a\circ b\circ e$ ist, genügt alſo für die ganze Klammerlöſung. Andrerseits enthält ſie auch nicht zuviel; denn angenommen, ſie ſollte nur gelten bis zu 10 Stiften oder Elementen, weiter aber nicht, ſo ſetzen wir, dass b 10 Stifte enthalte, dann gilt alſo nicht $a\circ(b\circ e) = a\circ b\circ e$, alſo auch von da ab keine einzige Art der Klammerlöſung (auserhalb der fortschreitenden Knüpfung).

Es erscheint aber Vielen, welche an das unwissenschaftliche Geschwätz gewöhnlicher Beweiſe in der Logik und Arithmetik gewöhnt ſind, die fortleitende oder inductorische Form des Beweiſes ermüdend, abschreckend und namentlich für Schulen unpractisch und unpassend. Dieſe werden vorausſichtlich auch über die vorliegende streng wissenschaftliche Methode die Naſe rümpfen und

vornehm aburtheilen. Diefen daher noch ein Wort. Ich frage diefe Gegner

1) Wollen fie mit bereits geknüpften Grösen anfangen, ohne die Gefetze der Knüpfung zu bestimmen und ohne Stifte oder Elemente zu fetzen, welche fie knüpfen?

Ich für meinen Theil halte es allein für wissenschaftlich und für Schüler elementar, erst nach einander eine Reihe ungeknüpfter Stifte oder Elemente zu fetzen und diefe demnächst zu andern Grösen nach bestimmten Gefetzen zu knüpfen.

2) Wollen fie aus den Stiften alle Grösen, welche fich aus denfelben durch Knüpfung erzeugen lassen, gleichzeitig ableiten, ohne allmählig von der jedesmal erzeugten Gröse zu der nächstfolgenden durch Knüpfung eines neuen Stiftes überzugeben?

Ich für meinen Theil erzeuge erst allmählig jede folgende Gröse aus der vorhergehenden durch Knüpfung eines neuen Stiftes, und jeder Elementarlehrer wird bestätigen, dass man nur auf diefem Wege in der Zahlenlehre die Zahlen erzeugen könne. Auch die Gegner haben fo in der Kindheit zählen gelernt, indem fie lernten: Eins und eins ist zwei; zwei und eins ist drei; drei und eins ist vier u. f. w. Der fortleitende (inductorische) Weg ist alfo bei dem Setzen der Stifte oder Elemente und bei der fortschreitenden Knüpfung der Stifte zu Grösen der gebotne, allein richtige und allein elementare.

3) Wollen fie bei der Knüpfung mehrer Grösen fofort beliebig viele und zwar beliebig zufammengefetzte knüpfen, oder wollen fie erst zwei Grösen knüpfen und zwar zunächst fo, dass die zweite nur zwei Stifte oder Elemente, demnächst dass fie drei Stifte und fortschreitend immer ein Stift mehr enthält?

Ich für meinen Theil wähle wieder den letztern Weg als den allein wissenschaftlichen und elementaren. Nachdem nämlich die Kinder die Zahlen erzeugt haben, fo beginnt nun in der Schule das Zufügen der Zahlen oder Addiren. Der Lehrer zeigt den Kindern, dass statt 2 zuzufügen, fie erst eins und dann noch eins zufügen können und übt dann ein „eins und zwei giebt drei, zwei und zwei giebt vier u. f. w.“ Ist dies bis zu voller Sicherheit eingeübt, fo zeigt der Lehrer, dass statt drei zuzufügen, man zwei und eins zufügen könne und übt dann das Zufügen von drei bis zu voller Sicherheit ein und ebenfo bei jeder folgenden Zahl zeigt der Lehrer, dass statt die folgende zuzufügen, man die vorhergehende und eins zufügen könne und übt jede folgende Reihe, ehe er weiter fortschreitet, bis zu voller Sicherheit ein.

Es giebt alſo nur einen elementaren Weg des Unterrichtes in der Formenlehre, das ist der fortleitende oder inductorische, und ebenſo giebt es nur einen wissenschaftlichen Weg der Entwicklung und des Beweiſes in den Anfangsgründen der Formenlehre, das ist wiederum der fortleitende oder inductorische. Doch wir kehren zum Gegenstande zurück.

Aus der Erklärung, dass $a\circ(b\circ e) = a\circ b\circ e$ ſei, wird in den Sätzen über die Einigung das Geſetz der Einigung oder das Klammergeſetz abgeleitet, dass, ſofern jene Grundformel gelte, auch jede Klammer beliebig geſetzt oder weggelassen werden könne und dass das Ergebniss wieder eine Gröse ſei, deren Stifte oder Elemente fortschreitend geknüpft ſind.

Für die Vertauschung der Grösen muss zunächst bemerkt werden, dass Vertauschung ohne Einigung nichts neues giebt. Sollte z. B. die Vertauschung zweier Stifte $e_1\circ e_2 = e_2\circ e_1$ gelten, aber nicht Einigung: so könnte man in $e_1\circ e_2\circ e_3$, wohl $e_1\circ e_2$ vertauschen, aber nicht $e_2\circ e_3$, denn stellt man die Klammern her, ſo ist $e_1\circ e_2\circ e_3 = (e_1\circ e_2)\circ e_3$, alſo wird e_2 und e_3 durch eine Klammer getrennt und kann, ſofern nicht Einigung gilt, auch nicht vertauscht werden, gilt dagegen Einigung, ſo kann man die Klammern beliebig ſetzen, alſo ist dann $e_1\circ e_2\circ e_3 = e_1\circ(e_2\circ e_3)$. Hier kann man e_2 und e_3 vertauschen und erhält alſo $e_1\circ(e_3\circ e_2) = e_1\circ e_3\circ e_2$. Die Erklärung der Vertauschung wird alſo die ſein müssen, dass nicht nur Einigung, ſondern auch auserdem die Vertauschung zweier benachbarter Stifte oder Elemente gilt. Bewieſen wird dann das Geſetz der Vertauschung, dass man die Klammer beliebig ſetzen und weglassen und die Ordnung der Grösen beliebig ändern kann ohne Aendrung des Werths des Ergebnisses.

Nach der Vertauschung folgt demnächst das Geſetz der Beziehung, bei welcher in dem niedern Grade der Knüpfung das Geſetz der Einigung oder Klammerlöſung vorausgeſetzt wird. Zur Erklärung der Beziehung genügt dann, dass $(a\circ e)b = ab\odot eb$ und dass $a(b\circ e) = ab\odot ae$ geſetzt ſei, indem ſich hieraus fortleitend oder inductorisch das ganze Beziehungsgeſetz ableiten lässt. Andrerſeits enthält dieſe Annahme aber auch nicht mehr, als unumgänglich nöthig ist, um das Beziehungsgeſetz daraus ableiten zu können. Endlich ist dieſe Erklärung auch allein elementar. Der Lehrer, welcher im Rechenunterrichte die Kinder weben oder multipliciren lehrt, zeigt den Kindern, dass einmal zwei zwei ist, und fährt dann fort: Zweimal zwei ist einmal zwei und einmal zwei, einmal zwei ist zwei, zwei und zwei ist vier, alſo ist zweimal zwei auch vier.

Dreimal zwei ist zweimal zwei und einmal zwei, zweimal zwei ist vier, einmal zwei ist zwei, vier und zwei ist sechs, alſo ist dreimal zwei auch ſechs. Viermal zwei ist dreimal zwei und einmal zwei, dreimal zwei ist ſechs, einmal zwei ist zwei, ſechs und zwei ist acht, alſo ist viermal zwei auch acht u. ſ. w. Die Erklärung ist alſo ganz elementar.

Die Geſetze für die einzelnen Grade der Knüpfung, für Fügung oder Addition, für Webung oder Multiplication und für Höhung oder Potenzirung ergeben ſich dann leicht.

Es bleibt nur noch übrig, einige Worte über die Kunstausdrücke zu ſagen. Die neue Betrachtungsweiſe der Sache erfordert auch neue Kunstwörter, wenn man wissenschaftlich strenge ſein will. So werden wir allein von der Knüpfungsweiſe der Multiplication in der Grösenlehre drei Arten, in der Begriffs- und Zahlenlehre je eine, in der Bindelehre und Ausenlehre je vier, im Ganzen alſo dreizehn Arten kennen lernen. Es ist unwissenschaftlich, dieſe verschiedenen Knüpfungsarten ſämmtlich durch dasſelbe Wort Multiplication bezeichnen zu wollen, auch das Zuſetzen von Adjectiven ist nur ein unwissenschaftliches Auskunftsmittel. Hier müssen alſo neue Namen eingeführt werden. Andrerſeits ist es ein unumgängliches Erforderniss, dass jeder Kunstausdruck deutsche Form und die Fähigkeit deutscher Umwandlung habe, wenn das Denken gründlich und genau werden und die Wissenschaft ins Volk eindringen ſoll. Es wird das Volk nie zu einem Verständnisse des Rechnens gelangen, wenn ihm von Addiren und Multipliciren, von Factoren und Product, von Multiplicator und Multiplicandus geredet, und dieſe Fremdwörter in der Dorfschule gebraucht und eingeübt werden ſollen. Es ist daher nothwendig, statt der Fremdwörter neue deutsche Wörter einzuführen, welche der Wissenschaft und der Volksschule gemeinſam ſein können.

Die Grösen, welche urſprünglich geſetzt, und aus denen die andern abgeleitet ſind, heisen lat. elementum, griechisch stoicheîon, deutsch Stiftc[2]) vom Verb stiften, d. h. ſestſetzen, anordnen, gründen. Die allgemeine Verbindung zweier Grösen nenne ich eine Knüpfung[3]), und zwar, wenn Vertauschung der verbundenen Grösen gilt, eine Verknüpfung, das Ergebniss der Knüpfung

[2]) Stift stammt vom Urverb stab, stütze, stemme; davon ist abgeleitet sskr. stamba der Pfeiler, griech. stíbos Pfad, agſ stap-ul Pfeiler, nhd. Stift.

[3]) Knüpfung stammt vom Urverb gnā, griech. néō, lat. neo spinne, ahd. nāa nähe, schnüre, knüpfe; davon ist abgeleitet lat. nodus, agſ. cnotta, cnyt, nhd. Knoten und knüpfe.

heist ein Gefammt[4]), wobei zu beachten ist, dass dies vom Ergebnisse der ersten Stufe oder der Summe verschieden ist.

Die Knüpfung ersten Grades heist in der Zahllehre bereits Addiren oder Fügen[5]), dies behalte ich bei. Die Art, wo keine Vertauschung gilt, nenne ich Einfügen, die, wo Vertauschung gilt, Zufügen.

Die Knüpfung des zweiten Grades heist in der Zahllehre Multipliciren oder Vervielfachen. Diefen Ausdruck, der nur für die Zahlen passt, behalte ich in der Zahllehre bei. In der Grösenlehre überfetze ich multi-plicare durch weben[6]), welcher Ausdruck das Wefen der Sache fehr treffend bezeichnet, indem hier jedes Stift des einen Factors mit jedem des andern geknüpft werden foll. Das Weben ohne Einigung und Vertauschung nenne ich Anweben, das mit Einigung ohne Vertauschung Einweben, das mit Einigung und Vertauschung Verweben.

Der dritte Grad der Knüpfung heisst in der Zahllehre Potenziren oder Höhen[7]). Diefen Ausdruck behalte ich bei. Das Höhen ohne Einigung und Vertauschung nenne ich Anhöhen, das mit Einigung ohne Vertauschung Einhöhen, das mit Einigung und Vertauschung Erhöhen.

Die Arten der Knüpfung find demnach in der Grösenlehre folgende:

Die Arten der Knüpfung der Grösenlehre.

Grad.	Name. Fremdwort.	Name. Deutschw	Keine Einigung, keine Vertauschnng.	Einigung ohne Vertauschung.	Einigung und zugleich Vertauschnng.
Erster	Addition	Fügen	Anfügen	Einfügen	Znfügen
Zweiter	Multiplication	Weben	Anweben	Einweben	Verweben
Dritter	Potenzirung	Höhen	Anhöhen	Einhöhen	Erhöhen

[4]) Gefammt stammt vom alten Formstamme sa sskr. sa, gr. ho, lat. se „mit, zugleich", der im Superlativ sama, sskr. sama, gr. hama, goth. sama, an. saman, ahd. saman, nhd. famt, zufammen lautet. Das Gefammt ist alfo die Zusammenfassung mehrer Grösen zu einer Gröse.

[5]) Füge stammt vom Urverb pak, sskr. paças, zend. paç, lat. pac-iscor, goth. fahan, agf. fangan, dän. fangen, nhd. fangen in der Bedeutung fange, binde. Füge ags. ge-fegan, schw. fogan bezeichnet demnach binden, an etwas fügen.

[6]) Webe ist das Urverb vap, sskr. vap, zend. vap, agf. vefan, ahd. weban, nhd. weben.

[7]) Höhe stammt vom Urverb kak, kank, sskr. cank, gr. koch-euo, lat. conc-täri, goth. hah-an, nhd. hangen, schweben, d. h. in der Höhe fein. Davon ist abgeleitet goth. hauhs, ahd. hoh, nhd. hoch, und goth. hauhja, nhd. Höhe.



Bei dem ersten Grade heisen ferner die gegebenen Grösen die **Stücke**[8]), das Ergebniss die **Summe**[9]). Das Zeichen des Fügens, ein stehendes Kreuz +, heist **Plus**[10]), die mit diesem Zeichen versehene Klammer eine **Plusklammer**.

Bei dem zweiten Grade heist die zu webende Gröse das **Fach**[11]) oder der **Factor**. Das Ergebniss heist beim Weben das **Product** oder das **Zeug**[12]), bei der allgemeinen Beziehung das **Erzeugniss**.

Bei dem dritten Grade heisen die zu knüpfenden Grösen die **Base**[13]) und der **Exponent** oder die **Stufe**[14]). Diese Namen behalte ich bei. Das Ergebniss des Höhens heist die **Höhe** oder **Potenz**.

---

[8]) **Stück** stammt vom Urverb stag, sskr. tuj, gr. tag, lat. tango stosse, goth. stikan, stak, agf. stican, ahd. stechan, nhd. stechen und goth. stinqvan, stanqv stosen. Davon ahd. stucchi, agf. sticce, nhd. Stück. das Abgestosene, ein Theil des Ganzen.

[9]) **Summe** ist aus dem lat. summa entlehnt. Dies stammt vom alten Formstamme upa, sskr. upa, gr. hypó, lat. sup, goth. uf, nhd. auf, der ursprünglich auf, oben bezeichnet. Davon ist durch die Gipfelendung am abgeleitet sskr. upama, lat. summa für supma, die oberste, höchste. Summa bezeichnet also die höchste, die Hauptsache, dann das Ganze, das Gesammt von Dingen.

[10]) **Plus** ist aus dem lat plus, pluris entlehnt. Dies stammt von dem alten Stamme par, sskr. par, gr. par, lat. par-io, lit. per-iù, af. ful, nhd. voll, füllen. Davon ist paru, sskr. puru, zend. paru, gr. polý-s, goth. filu, nhd. viel und in der Steigerung prâyas, zend. frâyâo, gr. pléon, altlat. plsos, lat. plus mehr abgeleitet.

[11]) **Fach** stammt vom Urverb pak, sskr. paç, lat. pac, goth. fahan, nhd. fahen, fangen in der Bedeutung fange, binde, dann fange an, mache. Das Fach ist also ein Geräth zum Fangen, zum Aufnehmen; dann in den Zusammensetzungen „einfach, sehnfach, hundertfach, das Vierfache" etc. zur Bezeichnung der Factoren allgemein üblich, mithin ächt deutsch.

[12]) **Zeug** stammt vom Urverb tagh, tangh, sskr. taksh, gr teúchō tyn-chánō, étych-on erzeuge, wirke, téch-nē Kunst, lat. texo webe, ahd. zingan, nhd. zeugen, erzeugen, weben, davon Zeng, ahd. ziuc, schwd. tyg, das Gewebte, das Geräth.

[13]) **Base** ist entlehnt aus dem lat. basis, dies aus dem gr. básis, Fus, Fusgestell. Das Wort stammt vom Urverb gva, sskr. ga, gr. ba, gehe, schreite.

[14]) **Stufe** stammt vom Urverb stab, stamb, sskr. stamb, gr. stémb-o, agf. stapan, steppan, ahd. stephan, stamph-on, treten, beschreiten, stapfen. Davon Stufe, engl. step, der Tritt einer Treppe, die Stufe.



Abschnitt 1. Erklärungen und Zeichen.

1. Die Grösenlehre ist die Wissenschaft von der Knüpfung der Grösen.

2. Gröse heist jedes, was Gegenstand des Denkens ist oder werden kann, sofern es nur einen und nicht mehre Werthe hat.

Gleich heisen zwei Grösen, wenn man in jeder Knüpfung der Formenlehre die eine statt der andern ohne Aendrung des Werthes setzen kann.

Ungleich heisen zwei Grösen, wenn man in keiner Knüpfung der Formenlehre die eine statt der andern ohne Aenderung des Werthes setzen kann.

Eine Gröse kann nie einer andern Gröse gleich und zugleich ungleich sein, sondern sie muss der andern Gröse entweder gleich oder ungleich sein; denn jede Gröse darf nur einen und nicht mehre Werthe haben.

3. Stift oder Element heist eine Gröse, wenn sie geknüpft werden soll, ohne dass sie selbst durch eine Knüpfung von Grösen entstanden ist und welche also ursprünglich gesetzt ist.

4. Der Buchstabe ist das Zeichen der Gröse. Derselbe Buchstabe bezeichnet in derselben Nummer der Formenlehre stets eine und dieselbe Gröse und hat also nur einen Werth. Im Uebrigen kann jeder Buchstabe jede beliebige Gröse bezeichnen.

Jeder Satz, welcher für einen Buchstaben bewiesen ist, gilt mithin für alle Grösen, welche der Buchstabe bezeichnen kann, d. h. für jede beliebige Gröse. Soll ein Buchstabe nur eine bestimmte Art von Grösen bezeichnen, so muss dies in der Nummer ausdrücklich gesagt und genau und unzweifelhaft festgestellt werden, welche Grösen dadurch bezeichnet werden sollen, sonst würde der Satz für alle beliebigen Grösen gelten.

In der Grösenlehre sind die Zeichen e_1 e_2 die Zeichen der Stifte oder Elemente, die Buchstaben $(a, b, c \cdots)$ die Zeichen beliebiger Grösen.

Wenn eine Reihe von Grösen (z. B. von n Grösen) gegeben ist, so bezeichnet man die Grösen der Reihe gerne durch denselben Buchstaben mit darunter gesetztem Zeiger, z. B.

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \cdots\cdots a_{n-1}, a_n.$$

Dann bezeichnet a_1 die erste, a_n die letzte Gröse der Reihe, a_a eine beliebige, a_{a+1} die nächstfolgende Gröse der Reihe.

5. Knüpfung von Grösen heist jede Zusammenstellung oder

Verbindung von Grösen, welche dem Geiste des Menschen möglich ist, sofern sie nur einen und nicht mehre Werthe hat.

Gesammt oder das Ergebniss der Knüpfung heist das, was durch die Knüpfung zweier Grösen entsteht. Das Gesammt ist, da es nur einen Werth hat und Gegenstand des Denkens ist, wieder eine Gröse und kann von neuem geknüpft werden.

Zeichen der Knüpfung kann jedes beliebige Zeichen werden. Dasselbe Knüpfungszeichen bezeichnet in derselben Nummer der Formenlehre stets eine und dieselbe Knüpfung. Im Uebrigen kann jedes Knüpfungszeichen jede beliebige Knüpfung bezeichnen.

Jeder Satz, welcher für ein Knüpfungszeichen bewiesen ist, gilt mithin für alle Knüpfungen, welche das Knüpfungszeichen bezeichnen kann. Soll ein Knüpfungszeichen nur eine bestimmte Art von Knüpfungen bezeichnen, so muss dies bei seiner Einführung ausdrücklich gesagt und genau und unzweifelhaft festgestellt werden, welche Knüpfungen dadurch bezeichnet werden sollen.

Das allgemeine Zeichen der Knüpfung, welches jede beliebige Knüpfung bezeichnen kann, ist der Kreis $\circ$, welcher zwischen die zu knüpfenden Grösen gesetzt wird (z. B. $a \circ b$, gelesen a Kreis b oder a geknüpft mit b oder a mit b).

Besondere Zeichen der Knüpfung sind das Gleichheitszeichen $=$ und das Ungleichheitszeichen $\gtrless$; das erstere bezeichnet, dass die geknüpften Grösen gleich sind (z. B. $a = b$, gelesen a gleich b), das zweite bezeichnet, dass die geknüpften Grösen ungleich sind (z. B. $a \gtrless b$, gelesen a ungleich b).

Die Knüpfung zweier Grösen durch das Gleichheitszeichen heist eine Gleichung. Die links stehende Gröse heist ihre linke Seite, die rechts stehende ihre rechte Seite.

6. Jede Grösenknüpfung findet nur zwischen zwei Grösen statt; denn nur diese Knüpfung hat einen und nicht mehre Werthe. Sollen mehre Grösen geknüpft werden, so muss genau und unzweifelhaft festgestellt werden, welche zwei Grösen zuerst geknüpft werden sollen, mit welcher dritten Gröse demnächst das Ergebniss jener Knüpfung geknüpft werden soll u. s. w.

Die Klammer ist das Zeichen, dass die in die Klammer eingeschlossenen Grösen zuvor zu einem Gesammte geknüpft werden sollen, ehe dies mit der Gröse ausser der Klammer verknüpft werden soll.

In jeder Klammer dürfen nur zwei Grösen stehen, sind mehre Grösen in derselben enthalten, so müssen alle bis auf eine in eine andere Klammer geschlossen sein, und müssen dann alle Grösen

in diefer andern Klammer zuvor zu einem Gefammte geknüpft fein, ehe das Gefammt diefer Klammer mit der einen auser diefer Klammer stehenden Gröse geknüpft werden darf.

Sind demnach n Grösen zu knüpfen, fo find in dem Ausdrucke n — 2 Klammern erforderlich, fofern kein Zweifel über die Reihenfolge der Knüpfung Statt finden foll (z. B. bei 5 Grösen find drei Klammern erforderlich [a∘([b∘c]∘d)]∘e).

7. Eine Reihe von Grösen **fortschreitend knüpfen** heist in der Reihe zuerst die erste mit der zweiten knüpfen; das Gefammt diefer Knüpfung mit der dritten knüpfen, und fofort jedesmal das Gefammt der Knüpfung aller frühern Grösen mit der nächstfolgenden knüpfen.

Soweit mehre Grösen fortschreitend geknüpft werden, können die Klammern fortgelassen werden, da über die Folge der Knüpfung kein Zweifel Statt finden kann. Die Klammern müssen nur dort stehen, wo von der fortschreitenden Knüpfung abgewichen wird, können aber auch in der fortschreitenden Knüpfung wieder eingeführt werden.

Das Gefammt aus der fortschreitenden Knüpfung der Grösen a_1, a_2, $a_3 \cdots a_n$ bezeichnen wir durch $G_{1,n}$.

8. **Formel** heist jede Knüpfung von Grösen, die Art der Knüpfung bestimmt die Gestalt der Formel.

Formel von a heist eine Formel, welche die Gröse a enthält. Das Zeichen derfelben ist F(a), gelefen „Formel von a". Das Zeichen F(a) bezeichnet in derfelben Nummer der Formenlehre eine und diefelbe Formel von a. Im Uebrigen kann fie jede beliebige Formel von a bezeichnen. Soll fie nur eine Art von Formeln bezeichnen, fo muss dies ausdrücklich gefagt werden.

Gleichlautend heisen zwei Formeln, wenn fie beide ganz diefelben Knüpfungen ganz derfelben Grösen enthalten.

Verschieden heisen zwei Formeln, wenn die Knüpfungen oder die Grösen der Formeln von einander abweichen. Zwei verschiedene Formeln find einander gleich, wenn die eine ohne Aenderung des Werthes in die andere umgewandelt werden kann.

Entsprechend heisen die Formeln zweier Grössen, wenn die Formeln gleichlautend werden, fobald man in der zweiten Formel die erste Gröse statt der zweiten einführt.

Erster Theil: Die Arten der Knüpfung.

Abschnitt 2. Gleichung der Grösen.

9. $a = a$ oder in Worten:
Jede Gröse ist ſich ſelbst gleich.

Beweis: Unmittelbar aus Erklärung No. 2 oder in Worten:
Nach No. 2 heisen zwei Grösen einander gleich, wenn man ohne Aenderung des Werthes die eine statt der andern ſetzen kann. Jede Gröse kann man, da ſie nach No. 2 nur einen Werth beſitzt, ohne Aenderung des Werthes für ſie ſelbst ſetzen, alſo ist jede Gröse ſich ſelbst gleich.

10. $a \circ b \circ c \circ d = ((a \circ b) \circ c) \circ d$ oder in Worten:
In jeder fortschreitenden Knüpfung von Grösen kann man die Klammern beliebig weglassen oder fortschreitend ſetzen.

Beweis: Unmittelbar aus No. 7 oder in Worten:
Die beiden Seiten der Gleichung ſind verschieden in der Form der Knüpfung. Nun kann man aber nach No. 7 in der fortschreitenden Knüpfung die Klammern fortlassen; thut man dies auf der rechten Seite, ſo werden ſie gleichlautend, alſo ſind ſie gleich nach No. 9.

10b. $G_{1,n+1}(a_a) = (G_{1,n}(a_a)) \circ a_{n+1}$ und
$G_{1,n}(a_a) = a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ \cdots a_n$.
Das Geſammt aus $n + 1$ Grösen $a_1, a_2 \cdots a_{n+1}$ ist gleich dem Geſammte aus den n ersten Grösen geknüpft mit der Grösse a_{n+1}.

Beweis: Unmittelbar aus No. 7.

11. $(a = b) = (b = a)$ oder in Worten:
Die beiden Seiten einer Gleichung kann man vertauschen.

Beweis: In Formeln $(a = b) = (a = a)$ (nach No. 2)
$= (b = a)$ (nach No. 2)

In Worten: Zwei Grösen ſind einander gleich, wenn man ohne Aenderung des Werthes in jeder Knüpfung die eine statt der andern ſetzen kann, alſo kann man statt der ersten die zweite und statt der zweiten die erste ſetzen.

12. Erklärung: Bedingt gleich oder gleich in Bezug auf eine Bedingung heisen zwei Grösen, wenn die Grösen gleich ſind, ſofern die Bedingung eintritt.

Das Zeichen der bedingten Gleichheit ist $\stackrel{*}{=}$; durch den Stern wird die Bedingung, für welche die Gleichheit eintritt, hinzugefügt.

Ein zweites Zeichen der bedingten Gleichheit ist die Verbindung zweier Gleichungen, von denen die eine die Annahme oder Bedingung (hypóthesis), die andere die Folgerung (thésis) heist.

13. $a \circ b \stackrel{*}{=} a \circ c$ * Bedingung $b = c$ oder

Annahme $b = c$ Folgerung $a \circ b = a \circ c$ oder in Worten: Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Seiten der Gleichnng mit gleichen Grösen auf gleiche Weife knüpft.

Beweis: Unmittelbar nach No. 2 oder in Worten: Die Gröse b ist gleich c, heist nach No. 2, man kann in jeder Knüpfnng von Grösen die eine statt der andern ohne Aenderung des Werthes fetzen, alfo kann man auch in der Knüpfung $a \circ b$ ohne Aenderung des Werthes c statt b fetzen, d. h. es ist nach 9 $a \circ b = a \circ c$.

14. Annahme: $a = b$ Folgerung: $F(a) = F(b)$ oder in Worten: Wenn zwei Grösen einander gleich find, fo ist auch jede Formel oder Function der ersten Gröse gleich der entsprechenden der zweiten Gröse.

Beweis: Unmittelbar aus No. 2 oder in Worten: Die Formeln zweier Grösen heisen entsprechend, wenn fie gleichlautend werden, fobald man in der zweiten Formel die erste Gröse statt der zweiten einführt. Nun ist aber $a = b$ nach der Annahme, alfo kann man ohne Aenderung des Werthes die eine statt der andern in jede Knüpfung, mithin auch in die Formel $F(a)$ fetzen, dann werden beide Formeln gleichlautend oder gleich, alfo ist $F(a) = F(b)$.

15. Annahme: $a = c$, $b = c$ Folgerung $a = b$. Wenn zwei Grösen einer dritten gleich find, fo find fie unter einander gleich.

Beweis: In Formeln: Annahme $b = c$ Folg.: $(a = c) = (a = b)$ (nach 13) oder in Worten: Die Gleichung $c = b$ bleibt nach No. 13 richtig, wenn man beide Seiten der Gleichung mit gleichen Grösen a auf gleiche Weife knüpft, alfo ist $(a = c) = (a = b)$.

16. Annahme: $a = b$, $b = c$ Folgerung: $a = c$ oder in Worten: Wenn die erste Gröse der zweiten und die zweite der dritten gleich ist, fo ist auch die erste der dritten gleich.

Beweis: Unmittelbar nach 13 Annahme: $b = c$ Folgerung: $(a = b) = (a = c)$ oder in Worten: Die Gleichung $b = c$ bleibt nach 13 richtig, wenn man beide Seiten der Gleichung mit gleichen Grösen a auf gleiche Weife knüpft, alfo ist $(a = b) = (a = c)$.

17. Satz des geraden (directen) Grösenbeweises:

Annahme: $a_1 = a_2,\ a_2 = a_3 \cdot\cdot\ a_{n-1} = a_n$ / oder $a_a = a_{a+1}$ | Folgerung $a_1 = a_n$

oder in Worten: Wenn in einer Reihe von Grösen jede vorhergehende der nächstfolgenden gleich ist, so ist auch die erste der letzten gleich.

Beweis in Formeln: Annahme $a_1 = a_2,\ a_2 = a_3$ Folgerung: $a_1 \doteq a_3$ (nach 16)

Annahme $a_1 = a_3,\ a_3 = a_4$ Folgerung $a_1 = a_4$ (nach 16)

u. s. w.

Annahme $a_1 = a_{n-1},\ a_{n-1} = a_n$ Folgerung $a_1 = a_n$ (nach 16)

Beweis in Worten: Nach der Voraussetzung ist die erste Gröse gleich der zweiten. Da aber nach der Voraussetzung ferner jede nächstvorbergehende der nächstfolgenden gleich ist, so kann ich in jeder Gleichung statt der nächstvorhergehenden Gröse die nächstfolgende setzen; also kann ich in der rechten Seite der ersten Gleichung statt der zweiten die dritte, statt der dritten die vierte und sofort bis zu der letzten Gröse der Reihe setzen, also ist auch die erste Gröse der letzten Gröse gleich.

18. Satz des fortleitenden (inductorischen) Grösenbeweises.

Annahme: $F(a_1) = \mathfrak{F}(a_1)$, $[F(a_a) = \mathfrak{F}(a_a)] = [F(a_{a+1}) = \mathfrak{F}(a_{a+1})]$

Folgerung: $F(a_n) = \mathfrak{F}(a_n)$ oder in Worten

Jede Gleichung der Formenlehre, welche für die erste Gröse einer Reihe gilt und welche, wenn sie für eine beliebige Gröse der Reihe gilt, auch für die nächstfolgende Gröse der Reihe Geltung hat, gilt auch für alle folgenden Grösen der Reihe.

Beweis in Formeln:

Es ist $F(a_1) = \mathfrak{F}(a_1)$ und $[F(a_1) = \mathfrak{F}(a_1)] = [F(a_2) = \mathfrak{F}(a_2)]$ Folgerung $F(a_2) = \mathfrak{F}(a_2)$ (nach No. 2)

Es ist $F(a_2) = \mathfrak{F}(a_2)$ und $[F(a_2) = \mathfrak{F}(a_2)] = [F(a_3) = \mathfrak{F}(a_3)]$ Folgerung $F(a_3) = \mathfrak{F}(a_3)$ (nach No. 2)

u. s. w.

Es ist $F(a_{n-1}) = \mathfrak{F}(a_{n-1})$ und $[F(a_{n-1}) = \mathfrak{F}(a_{n-1})] = [F(a_n) = \mathfrak{F}(a_n)]$ Folgerung $F(a_n) = \mathfrak{F}(a_n)$ (nach No. 2)

In Worten: Nach der Annahme gilt die Gleichung $F(a_1) = \mathfrak{F}(a_1)$ für die erste Gröse der Reihe. Ferner gilt diese Gleichung, sobald sie für eine beliebige Gröse der Reihe a_a gilt, auch für die nächstfolgende Gröse der Reihe a_{a+1}; man kann mithin in dieser Gleichung a_{a+1} statt a_a setzen, oder es ist in Bezug auf diese Gleichung $a_a \doteq a_{a+1}$, mithin ist auch in Bezug auf diese Gleichung $a_1 \doteq a_n$

nach No. 17, d. h. man kann in dieser Gleichung auch statt der ersten Gröse der Reihe a_1 die letzte Gröse der Reihe a_n setzen, oder die Gleichung gilt, da sie für die erste Gröse gilt, auch für die letzte Gröse der Reihe.

19. Satz des Stiftbeweises (elementaren Beweises).

Jede Gleichung der Formenlehre, welche für ein Stift oder Element gilt, und welche, sobald sie für eine beliebige Gröse gilt, auch für jede Gröse gilt, welche ein Stift mehr enthält, gilt auch für alle durch fortschreitende Knüpfung von Stiften erzeugten Grösen.

Beweis: Unmittelbar aus 18, wenn man das Stift als erste Gröse und die ein Stift mehr enthaltende Gröse jedesmal als nächstfolgende Gröse in der Reihe setzt.

Abschnitt 3. Anreihung der Grösen.

20. Erklärung: Anreihung heist eine Knüpfung von Grösen, sofern die Klammer nicht weggelassen, die Stellung der Grösen nicht geändert werden darf, ohne dass sich der Werth des Gesammtes ändert.

Beispiele: Jeder wissenschaftliche Bau, jedes Wörterbuch.

Abschnitt 4. Einigung der Grösen.

21. Erklärung. Einigung heist eine Knüpfung von Grösen, sofern man statt mit der zweiten Gröse ein Stift oder Element zu knüpfen, dies auch mit dem Gesammte der Knüpfung der beiden Grösen knüpfen kann, ohne dass sich der Werth des Gesammtes ändert.

Beispiele: Die Geänder in der Bindelehre (Combinationslehre); denn bei den Geändern ist $a(bc) = abc$, aber nicht $ab = ba$, es gilt also Einigung ohne Vertauschung.

22. $a\circ(b\circ e) = a\circ b\circ e$ oder in Worten Statt mit der zweiten Gröse ein Stift oder ein Element zu einigen kann man es mit dem Gesammte der beiden Grösen einigen, und — Statt mit dem Gesammte zweier Grösen ein Stift zu einigen kann man es mit der zweiten Gröse einigen.

23. Das Gesammt der Einigung zweier Grösen a und b, deren Stifte oder Elemente fortschreitend geknüpft sind, ist wieder eine Gröse, deren Stifte fortschreitend geknüpft sind.

Formelbeweis: Nach Stiften oder elementar in Bezug auf b.

1. Der Satz gilt, wenn b nur ein Stift e enthält, denn es ist $a \circ e$ nach 7 eine Gröse, in welcher die Stifte fortschreitend geknüpft ſind.
2. Wenn der Satz für eine Gröse $a \circ b$ gilt, ſo dass $a \circ b$ eine Gröse ist, deren Stifte fortschreitend geknüpft ſind (Annahme), ſo gilt er auch für die Gröse $a \circ (b \circ e)$, wo b ein Stift e mehr enthält, ſo dass auch $a \circ (b \circ e)$ wieder eine Gröse ist, in welcher die Stifte fortschreitend geknüpft ſind (Folgerung); denn es ist

$$a \circ (b \circ e) = a \circ b \circ e \qquad \text{(nach 22)}$$

d. h. da $a \circ b$ nach der Annahme eine Gröse ist, deren Stifte fortschreitend geknüpft ſind, ſo ist auch $a \circ b \circ e$, alſo auch $a \circ (b \circ e)$ eine Gröse, deren Stifte fortschreitend geknüpft ſind.
3. Mithin gilt der Satz nach No. 19 allgemein für alle Grösen b.

24. $a \circ (b \circ c) = a \circ b \circ c$ oder in Worten

In der Einigung dreier Grösen kann man die Klammern beliebig weglassen oder ſetzen.

Formelbeweis: Nach Stiften oder elementar in Bezug auf c.

1. Die Gleichung gilt, wenn c nur ein Stift enthält (nach 22).
2. Wenn die Gleichung für eine Gröse c gilt (Annahme), ſo gilt ſie auch für die Gröse $c \circ e$, welche ein Stift mehr enthält (Folgerung); denn

$$\begin{aligned} a \circ [b \circ (c \circ e)] &= a \circ [b \circ c \circ e] && \text{(nach 22)} \\ &= a \circ (b \circ c) \circ e && \text{(nach 22)} \\ &= a \circ b \circ c \circ e && \text{(nach Annahme)} \\ &= a \circ b \circ (c \circ e) && \text{(nach 22)} \end{aligned}$$

3. Alſo gilt der Satz nach 19 auch allgemein für alle Grösen.

Beweis in Worten: Ganz der Beweis von 23. Wenn man in der dritten Gröse c alle Klammern herstellt und die Stifte nach 22 rückschreitend aus der Klammer entfernt, ſo kann man die ſämmtlichen Stifte von c aus der Klammer entfernen und die Klammer alſo weglassen.

25. Geſetz der Einigung (Klammergeſetz).

In jeder Knüpfung beliebiger Grösen, für welche Einigung gilt, kann man jede Klammer beliebig weglassen oder ſetzen, und das Geſammt der Knüpfung ist eine Gröse, deren Stifte oder Elemente fortschreitend geknüpft ſind.

Beweis in Formeln, fortleitend (inductoriſch) in Bezug auf $G_{1,n} b_b$.

Es ſei gegeben $a \circ (G_{1,n} b_b) = a \circ (b_1 \circ b_2 \cdots \circ b_n)$, zu beweiſen ist $a \circ (b_1 \circ b_2 \cdots \circ b_n) = a \circ b_1 \circ b_2 \cdots \circ b_n$.

1. Die Gleichung gilt, wenn $G_{1,n}b_\delta$ nur zwei Grösen $b_1 \circ b_2$ enthält (nach No. 24).
2. Wenn die Gleichung für irgend ein Gesammt $G_{1,n}b_\delta$ gilt (Annahme), so gilt sie auch für das Gesammt $G_{1,n+1}b_\delta$, welches eine Gröse b_{n+1} mehr enthält (Folgerung), denn

$$a \circ (G_{1,n+1}b_\delta) = a \circ (G_{1,n}b_\delta \circ b_{n+1}) \quad \text{(nach 10 b)}$$
$$= (a \circ G_{1,n}b_\delta) \circ b_{n+1} \quad \text{(nach 24)}$$

3. Mithin gilt die Gleichung nach No. 18 allgemein.

Beweis in Worten: Man stelle zunächst alle Klammern wieder her. Dann sind in jeder Klammer nach 6 nur zwei Grösen enthalten, und ist das Gesammt der Klammer nur mit einer dritten Gröse auser der Klammer zu knüpfen. Man kann also nach No. 24 jedesmal die äuserste Klammer weglassen, und so nach der Reihe sämmtliche Klammern weglassen, die Formel wird dabei eine Gröse, in welcher alle Stifte fortschreitend geknüpft sind.

26. In jeder Knüpfung von Grösen für welche Einigung gilt, kann man statt der Stifte oder Elemente auch beliebige aus diesen erzeugte Grösen als Stifte oder Elemente setzen und daraus neue Grösen ableiten, und gelten auch für diese alle Gesetze der Einigung.

Beweis: Die Grundformel der Einigung ist $a \circ (b \circ e) = a \circ b \circ e$, aus dieser sind alle Gesetze der Einigung abgeleitet. Diese Formel gilt aber nach 24 auch, wenn wir statt des Stiftes e eine beliebige Gröse c einführen u. s. w.

Abschnitt 5. Vertauschung der Grösen.

27. Erklärung. Vertauschung heist eine Knüpfung von Grösen, sofern auser der Einigung auch die Vertauschung zweier Stifte oder Elemente gilt.

28. $e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1$

Zwei Stifte oder Elemente kann man, wenn Vertauschung gilt, mit einander vertauschen.

29. Gesetz der Vertauschung (Ordnungsgesetz).

In jeder Knüpfung beliebiger Grösen, für welche Vertauschung gilt, kann man die Klammern beliebig setzen oder weglassen und die Ordnung der zu verknüpfenden Grösen beliebig ändern, ohne dass sich der Werth des Gesammtes ändert, und das Gesammt der Knüpfung ist eine Gröse, deren Stifte oder Elemente fortschreitend verknüpft sind.

Beweis in Formeln: Der Formelbeweis zerfällt in drei Theile, man muss nämlich beweisen,

1. dass man eine Gröse und ein Stift vertauschen kann, oder dass $a \frown e = e \frown a$,
2. dass man zwei Grösen unter einander vertauschen kann, oder dass $a \frown b = b \frown a$ und
3. dass bei mehren Grösen jede Gröse eine beliebige Stelle erhalten kann, oder dass $a \frown b \frown c \frown d = a \frown d \frown c \frown b$.

a. Beweis nach Stiften oder elementar in Bezug auf a.

1. Die Gleichung $a \frown e_1 = e_1 \frown a$ gilt, wenn a nur ein Stift e_2 enthält, denn $e_2 \frown e_1 = e_1 \frown e_2$ (nach 28).
2. Wenn die Gleichung für eine beliebige Gröse a gilt (Annahme), fo gilt fie auch für die Gröse $a \frown e_2$, welche ein Stift e_2 mehr enthält (Folgerung); denn

$$\begin{aligned} (a \frown e_2) \frown e_1 &= a \frown (e_2 \frown e_1) && \text{(nach 22)} \\ &= a \frown (e_1 \frown e_2) && \text{(nach 28)} \\ &= (a \frown e_1) \frown e_2 && \text{(nach 22)} \\ &= (e_1 \frown a) \frown e_2 && \text{(nach Annahme)} \\ &= e_1 \frown (a \frown e_2) && \text{(nach 22)} \end{aligned}$$

3. Alfo gilt die Gleichung nach 19 allgemein.

b. Beweis nach Stiften oder elementar in Bezug auf b.

1. Die Gleichung $a \frown b = b \frown a$ gilt, wenn b nur ein Stift e enthält (nach 29a).
2. Wenn die Gleichung für eine beliebige Gröse b gilt (Annahme), fo gilt fie auch für jede Gröse $b \frown e$, welche ein Stift mehr enthält (Folgerung); denn

$$\begin{aligned} a \frown (b \frown e) &= (a \frown b) \frown e && \text{(nach 22)} \\ &= (b \frown a) \frown e && \text{(nach Annahme)} \\ &= b \frown (a \frown e) && \text{(nach 22)} \\ &= b \frown (e \frown a) && \text{(nach 29a)} \\ &= (b \frown e) \frown a && \text{(nach 24)} \end{aligned}$$

3. Alfo gilt der Satz nach 19 allgemein.

c. Da Einigung gilt, fo kann man die Grösen zwischen der zu verfetzenden Gröse d und der Stelle, wohin fie verfetzt werden foll, in eine Klammer schliesen, dann ist

$$\begin{aligned} a \frown b \frown c \frown d &= a \frown [(b \frown c) \frown d] && \text{(nach 25)} \\ &= a \frown [(c \frown b) \frown d] && \text{(nach 29b)} \\ &= a \frown [d \frown (c \frown b)] && \text{(nach 29b)} \\ &= a \frown d \frown c \frown b && \text{(nach 25)} \end{aligned}$$

Beweis in Worten: a Da Vertauschung gilt, fo gilt nach 27 auch Einigung, alfo kann man nach 25 auch die Klammern beliebig fetzen oder weglassen, ohne dass fich der Werth des Gefammtes ändert.

b. Man kann aber auch jedes Stift in jede beliebige Stelle bringen. Denn nach dem Gesetze der Einigung No. 25 kann man ein beliebiges Stift mit seinem benachbarten, z. B. dem vorhergehenden, in eine Klammer schliesen, dann die Stifte nach No. 28 vertauschen und demnächst die Klammer wieder lösen. Auf gleiche Weise kann man dasselbe Stift wieder mit dem nunmehr benachbarten, z. B. vorhergehenden, in eine Klammer schliesen, wieder die Stifte vertauschen und dann die Klammer lösen und sofort. Man kann also jedes beliebige Stift in jede beliebige vorhergehende oder nachfolgende Stelle bringen ohne Aenderung des Werthes.

c. Ebenso kann man jede Gröse in jede beliebige Stelle bringen, indem man nach der Reihe jedes Stift der Gröse ohne Aenderung des Werthes an jene Stelle bringt. Mithin kann man die Ordnung der zu knüpfenden Grösen beliebig ändern, ohne dass sich der Werth des Gesammtes ändert. Das Gesammt ist nach 25 wieder eine Gröse, deren Stifte fortschreitend geknüpft sind.

30. In jeder Knüpfung von Grösen, für welche Vertauschung gilt, kann man statt der Stifte oder Elemente auch beliebige, aus diesen erzeugte Grösen als Stifte oder Elemente setzen und daraus neue Grösen ableiten, und gelten auch für diese alle Gesetze der Vertauschung.

Beweis: Die Gesetze der Vertauschung sind sämmtlich aus den beiden Grundformeln $a \circ (b \circ e) = a \circ b \circ e$ und $e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1$ abgeleitet, diese gelten aber nach 29 auch für beliebige Grösen, also u. s. w.

Abschnitt 6. Beziehung der Grösen.

31. Erklärung. Beziehung heist die Knüpfung zweier Grösen, das Ergebniss der Beziehung heist Erzeugniss, sofern

1. das Erzeugniss zweier Stifte oder Elemente wieder ein Stift ist und
2. statt mit der einen Gröse ein Stift auf eine Art zu einigen, man mit dem Erzeugnisse der beiden Grösen das Erzeugniss des Stiftes und der andern Gröse auf eine zweite Art einigen kann.

Für die beiden zu beziehenden Grösen können verschiedene Arten der Beziehung und dem entsprechend auch verschiedene Arten der Einigung gelten. Wir unterscheiden demnach für jede der beiden Beziehungen 2 Arten der Einigung und nennen die beiden Arten, welche bei derselben Beziehung vorkommen, entsprechende.

Die Zeichen der Arten der Einigung ſind $\circ$ $\odot$, geleſen erst-geeint und zweitgeeint (z. B. $a\odot b$, geleſen a zweit b, d. h. a auf die zweite Art geeint mit b). Die Arten der Beziehung ſind hierdurch schon unterschieden, für beide Arten kann mithin dasſelbe Zeichen dienen. Das Zeichen der Beziehung ist das Nebeneinanderschreiben der zu beziehenden Grösen ohne Zeichen (z. B. ab, geleſen ab oder a auf b).

Die Knüpfung durch Beziehung heist den andern Arten der Knüpfung gegenüber der **höhere Grad** der Knüpfung.

Eine Klammer heist eine **Beziehungsklammer**, ſofern die Grösen in der Klammer durch Einigung geknüpft ſind, und die Gröse auser der Klammer mit ihnen durch Beziehung geknüpft wird (z. B. $(a\circ b)c$).

32. $(a\circ e)b = ab\odot ae$

$a(b\circ e) = ab\odot ae$

Statt zu der einen Gröse ein Stift oder Element zu einigen, kann man zu dem Erzeugnisse der beiden Grösen das Erzeugniss des Stiftes und der zweiten Gröse entsprechend einigen.

33. Das Erzeugniss ae und eb eines Stiftes oder Elementes und einer Gröse, deren Stifte fortschreitend geknüpft ſind, ist wieder eine Gröse, deren Stifte fortschreitend geknüpft ſind.

Beweis nach Stiften oder elementar in Bezug auf a.

1. Der Satz gilt, wenn a nur ein Stift enthält; denn e_1e_2 ist ein Stift (nach 31. 1).
2. Wenn der Satz für a gilt (Annahme), ſo gilt er auch für die Gröse $a\circ e_1$, welche ein Stift mehr enthält (Folgerung); denn es ist $(a\circ e_1)e = ae\odot e_1e$ (nach 32). Nun ist ae eine Gröse, deren Stifte fortschreitend geknüpft ſind nach der Annahme, e_1e ist ein Stift (nach 31. 1) und fortschreitend geknüpft, alſo ist auch $ae\odot e_1e$ eine Gröse, deren Stifte fortschreitend geknüpft ſind.
3. Alſo gilt der Satz nach 19 auch allgemein.

Und ebenſo folgt, dass eb eine Gröse, deren Stifte fortschreitend geknüpft ſind.

34. Das Erzeugniss ab zweier Grösen, deren Stifte oder Elemente fortschreitend geknüpft ſind, ist wieder eine Gröse, deren Stifte fortschreitend geknüpft ſind und gelten für die Erzeugnisse alle Geſetze der Einigung.

Beweis nach Stiften oder elementar in Bezug auf b.

1. Der Satz gilt, wenn b nur ein Stift enthält, nach 33.
2. Wenn der Satz für eine beliebige Gröse b gilt (Annahme),

ſo gilt er auch für die Gröse $b \circ e$, welche ein Stift mehr enthält (Folgerung); denn nach 32 ist

$$a(b \circ e) = ab \odot ae.$$

Hier aber ist ab eine Gröse, deren Stifte fortschreitend geknüpft ſind (nach Annahme) und ae eine ebenſolche Gröse (nach 33); das Gesammt zweier Grösen, deren Stifte fortschreitend geknüpft ſind, ist aber nach 25, wenn Einigung gilt, wieder eine Gröse, deren Stifte fortschreitend geknüpft ſind, alſo ist auch $a(b \circ e)$ eine Gröse, deren Stifte fortschreitend geknüpft ſind.

3. Alſo gilt der Satz nach 19 allgemein.

35. $$(a \circ b)c = ac \odot bc$$
$$c(a \circ b) = ca \odot cb$$ oder in Worten

Das Erzeugniss einer Gröse und eines Geſammtes aus 2 Grösen ist gleich dem entsprechenden Geſammte aus den Erzeugnissen jener Gröse mit den beiden Grösen.

Formelbeweis: Nach Stiften oder elementar in Bezug auf b.

1. Die Gleichung gilt, wenn b nur ein Stift enthält, nach 32.
2. Wenn die Gleichung für eine beliebige Gröse b gilt (Annahme), ſo gilt ſie auch für die Gröse $b \circ e$, welche ein Stift e mehr enthält; denn

$$[a \circ (b \circ e)]c = [(a \circ b) \circ e]c \quad \text{(nach 25)}$$
$$= (a \circ b)c \odot ec \quad \text{(nach 32)}$$
$$= ac \odot bc \odot ec \quad \text{(nach Annahme)}$$
$$= ac \odot (bc \odot ec) \quad \text{(nach 25)}$$
$$= ac \odot (b \circ e)c \quad \text{(nach 32)}$$

3. Alſo gilt der Satz nach 19 allgemein.

Und ebenſo folgt $c(a \circ b) = ca \odot cb$.

Beweis in Worten: Jedes Geſammt zweier Grösen ist, wenn Einigung gilt, gleich dem entsprechenden Geſammte aus den fortschreitend verknüpften Stiften der beiden Grösen (nach 25). Fassen wir dieſe bis auf das letzte Stift e in eine Gröse F zuſammen, ſo ist das Erzeugniss jenes Erst-Geſammtes und einer Gröse c gleich dem betreffenden Zweit-Geſammte aus den Erzeugnissen $Fc \circ ec$. Auf dieſelbe Weise kann man jedesmal das letzte Stift des Erst-Geſammtes aus dieſem entfernen und ſo nach und nach das ganze Erzeugniss aus dem Erst-Geſammte und der Gröse c in das betreffende Zweit-Geſammt verwandeln, dessen zu einigende Grösen die Erzeugnisse der einzelnen Stifte mit dieſer Gröse ſind. Endlich kann man dieſe zu einigenden Grösen wieder ſo zuſammenfassen, dass man alle Erzeugnisse, welche Stifte des a enthalten, in ein

Erzeugniss des a mit dem c zusammenfasst, und ebenso die, welche Stifte des B enthalten, in ein Erzeugniss des b mit dem c und diese beiden Ergebnisse zweiteinigt.

36. $[G_{1,n} \circ a_a] b = G_{1,n} \odot a_a b$

$b [G_{1,n} \circ a_a] = G_{1,n} \odot b a_a$

Das Erzeugniss einer Gröse b und eines Gesammtes aus beliebig vielen Grösen ist gleich dem entsprechenden Gesammte aus den Erzeugnissen jener Grösen mit diesen einzelnen Grösen oder — Eine Beziehungsklammer löst man, indem man jede Gröse in der Klammer mit der Gröse auser der Klammer bezieht und die entstandenen Erzeugnisse auf die entsprechende Art einigt.

Beweis in Formeln fortleitend oder inductorisch in Bezug auf $G_{1,n} a_a$.

1. Die Gleichung gilt, wenn $G_{1,n} \circ a_a$ nur 2 Grösen $a_1 \circ a_2$ enthält, nach 35.
2. Wenn die Gleichung für ein Gesammt $G_{1,n} \circ a_a$ aus beliebig vielen Grösen gilt (Annahme), so gilt sie auch für das Gesammt $G_{1,n+1} \circ a_a$, welches eine Gröse a_{n+1} mehr enthält (Folgerung); denn

$$\begin{aligned} [G_{1,n+1} \circ a_a] b &= [(G_{1,n} \circ a_a) \circ a_{n+1}] b && \text{(nach 10 b)} \\ &= [G_{1,n} \circ a_a] b \odot a_{n+1} b && \text{(nach 35)} \\ &= (G_{1,n} \odot a_a b) \odot a_{n+1} b && \text{nach Annahme} \\ &= G_{1,n+1} \odot a_a b && \text{(nach 10 b)} \end{aligned}$$

3. Also gilt der Satz nach 18 allgemein.

Und ebenso folgt, dass $b [G_{1,n} \circ a_a] = G_{1,n} \odot b a_a$ ist.

Beweis in Worten: Man stelle in dem Gesammte nach 25, da Einigung gilt, alle Klammern her, so ist jedes Gesammt ein Gesammt aus 2 Grösen. Das Erzeugniss einer Gröse b und dieses Gesammtes ist gleich dem entsprechenden Gesammte aus den beiden Erzeugnissen jener Gröse b mit den beiden einzelnen Grösen. Ist nun eine der beiden Grösen noch ein Gesammt, so verwandelt sich ganz auf dieselbe Weise das Erzeugniss jener Gröse b und dieses Gesammtes wieder in das entsprechende Gesammt zweier Erzeugnisse jener Gröse b mit den einzelnen Grösen und sofort, bis keine der Grösen mehr ein Gesammt anderer Grösen ist und also das Ganze in ein entsprechendes Gesammt aus den Erzeugnissen der Gröse b und der einzelnen Grösen umgewandelt ist.

37. In jeder Knüpfung von Grösen, für welche Beziehung gilt, kann man statt der Stifte oder Elemente auch beliebige, aus diesen erzeugte Grösen als Stifte setzen und daraus neue Grösen ableiten, und gelten auch für diese alle Gesetze der Beziehung.

Beweis: Die Geſetze der Beziehung ſind ſämmtlich aus der Grundformel der Einigung $a \circ (b \circ e) = a \circ b \circ e$ und aus denen der Beziehung $(a \circ e)c = ac \odot ec$ und $a(b \circ e) = ab \odot ae$ abgeleitet, dieſe gelten aber nach 24 und nach 35 auch für beliebige Grösen, alſo u. ſ. w.

38. Erklärung. Wenn die Arten der Einigung auf beiden Seiten gleich ſind, ſo heist die Beziehung eine **einfache Beziehung**, wenn ſie verschieden ſind, eine **Doppelbeziehung**.

39. Geſetz der **einfachen Beziehung**.

$$(G_{1,n}a_a)(G_{1,m}b_b) = G_{1,n\cdot 1,m}a_ab_b.$$

Das Erzeugniss zweier Geſammte erhält man, indem man jede Gröse des einen Geſammtes mit jeder des andern Geſammtes einfach bezieht und die erhaltenen Erzeugnisse einigt. Das erhaltene Geſammt ist wieder eine Gröse, deren Stiſte oder Elemente fortschreitend geknüpft ſind.

Beweis in Formeln:

$$(G_{1,n}a_a)(G_{1,m}b_b) = G_{1,n}a_a(G_{1,m}b_b) \qquad \text{(nach 36)}$$
$$= G_{1,n\cdot 1,m}a_ab_b \qquad \text{(nach 36)}$$

Beweis in Worten: Man betrachte zuerst das zweite Geſammt als eine Gröse, ſo ist das Erzeugniss der beiden Geſammte gleich dem Geſammte aus den Erzeugnissen, welche man erhält, wenn man jede Gröse des ersten Geſammtes mit dem ganzen zweiten Geſammte bezieht (nach 36). Und jedes ſolche Erzeugniss ist gleich dem Geſammte der Erzeugnisse, welche man erhält, wenn man die betreffende Gröse des ersten Geſammtes mit jeder Gröse des zweiten Geſammtes bezieht. Das erhaltene Geſammt aber ist nach 34 wieder eine Gröse, deren Stiſte oder Elemente fortschreitend geknüpft ſind.

40. $$(G_{1,n}a_a)(G_{1,m}b_b)(G_{1,p}c_c)\cdots = G_{1,n\cdot 1,m\cdot 1,p}\cdots a_ab_bc_c\cdots.$$

Das Erzeugniss mehrer Geſammte erhält man, indem man jede Gröse des ersten Geſammtes mit jeder des zweiten Geſammtes einfach bezieht, jedes erhaltene Erzeugniss mit jeder Gröse des dritten Geſammtes einfach bezieht u. ſ. w. und die erhaltenen Erzeugnisse einigt. Das erhaltene Geſammt ist wieder eine Gröse, deren Stiſte oder Elemente fortschreitend geknüpft ſind.

Beweis: $$(G_{1,n}a_a)(G_{1,m}b_b)(G_{1,p}c_c)\cdots = [(G_{1,n}a_a)(G_{1,m}b_b)](G_{1,p}c_c)\cdots$$
$$= (G_{1,n\cdot 1,m}a_ab_b)(G_{1,p}c_c)\cdots \qquad \text{(nach 39)}$$
$$= (G_{1,n\cdot 1,m\cdot 1,p}a_ab_bc_c)\cdots \qquad \text{(nach 39)}$$

u. ſ. w.

Zweiter Theil: Die Grade der Knüpfung.

Abschnitt 7. Fügung (oder Addition), der niedrigste Grad der Knüpfung.

41. **Erklärung.** Fügung (oder Addition im weiten Sinne) heist der niedrigste Grad der Grösenknüpfung, fofern für diefelbe die Grundformel der Einigung gilt, d. h. fofern

> statt zu dem Gefammte zweier Grösen ein Stift oder Element zu fügen, man dies auch zu der zweiten Gröse fügen kann.

Die zu fügenden Grösen heisen Stücke oder Summanden, das Gefammt der Fügung heist Summe.

Das Zeichen der Fügung ist ein stehendes Kreuz $+$, gelefen „plus" oder „zu". Eiue Klammer, vor welcher das Kreuz $+$ steht, heist eine Plusklammer. Das Zeichen der Summe von n Grösen $a_1, a_2 \cdot \cdot a_n$ ist $S_{1,n} a_a$.

Null*) heist diejenige Gröse, welche zu jeder Gröse ohne Aenderung ihres Werthes gefügt werden kann; das Zeichen der Null ist 0.

Stiftgrösen oder Elementargrösen heisen die Stifte oder Elemente und die durch fortschreitende Fügung derfelben erzeugten Grösen nebst Null.

42. **Grundformel der Fügung (Addition im weiten Sinne).**

$$a + (b + e) = a + b + e$$ oder in Worten

Statt zu dem zweiten Stücke ein Stift oder Element zu fügen, kann man es zur Summe fügen und — Statt zu der Summe ein Stift zu fügen, kann man es zu dem zweiten Stücke fügen.

43. $$a + 0 = a \qquad 0 + a = a$$

Null, zu jeder beliebigen Gröse gefügt, ändert die Gröse nicht.

44. **Gefetz der Fügung (Addition im weiten Sinne).** In jeder Knüpfung durch Fügung kann man ohne Aenderung

*) Null ist aus dem Lat. nullum entlehnt, dies ist zufammengefetzt aus dem verneinenden Formstamme ne und dem Deuter ullum, der Verkleinerungsform unulum von unus einer. Es bezeichnet alfo nicht irgend etwas, nicht das Geringste.

des Werthes die Plusklammern beliebig fetzen oder weglassen. Die Summe ist wieder eine Stiftgröse.

Beweis: Nach 42 gilt die Grundformel der Einigung, alfo nach Abschnitt 4 auch das Gefetz der Einigung, d. h. man kann die Klammern beliebig fetzen oder weglassen, und das Ergebniss ist wieder eine Gröse, deren Stifte fortschreitend gefügt find, d. h. nach 41 eine Stiftgröse.

45. Erklärung. Die Fügung heist, wenn nur Einigung, nicht aber Vertauschung gilt, Einfügung, dagegen wenn Vertauschung gilt, Zufügung (Addition im engen Sinne).

46. Grundformel der Znfügung (Addition im engen Sinne).

$$e_1 + e_2 = e_2 + e_1$$

Bei der Zufügnng kann man zwei Stifte oder Elemente vertauschen.

47. Gefetz der Zufügung (Addition im engen Sinne).

In jeder Knüpfung von Grösen durch Zufügung kann man ohne Aenderung des Werthes die Plusklammern beliebig fetzen oder weglassen und die Ordnung der Stücke beliebig ändern, die Summe ist wieder eine Stiftgröse.

Beweis: Nach 44 gilt für jede Fügung das Gefetz der Einigung, d. h. man kann ohne Aenderung des Werthes die Plusklammern beliebig fetzen oder weglassen, und die Summe ist wieder eine Stiftgrösse. Nach 46 gilt ferner die Grundformel der Vertauschung, alfo gilt nach Abschnitt 5 auch das Gefetz der Vertauschung, d. h. man kann ohne Aenderung des Werthes die Ordnung der Stücke beliebig ändern. Mithin gilt das ganze Gefetz der Zufügung.

Abschnitt 8. Webnng (oder Multiplication), der mittlere Grad der Knüpfnng.

48. Erklärung. Webung (oder Multiplication im weiten Sinne) heist der mittlere Grad der Grösenknüpfung, fofern für diefelbe die Grundformel der einfachen Beziehung gilt, d. h.

> fofern bei zwei Grösen statt zu der einen Gröse ein Stift oder Element zu fügen, man zu dem Erzeugnisse der beiden Grösen das Erzeugniss des Stiftes und der andern Gröse fügen kann.

Die zu webenden Grösen heisen Fache oder Factoren, das Erzengniss des Webens heist Zeug oder Product.

Das Zeichen des Webens ist ein Punkt oder das blose Nebeneinanderschreiben der Fache, gelefen „mal". Eine Klammer heist,

wenn die Grösen in und auser der Klammer durch Weben verknüpft ſind, eine Malklammer*).

Eins heist dasjenige Stift oder Element, welches mit jedem Stifte ohne Aenderung des Werthes gewebt werden kann.

49. Grundformel des Webens (Multiplication im weiten Sinne).

$$(a + e)b = ab + eb \qquad a(b + e) = ab + ae$$

Statt zu dem einen Fache oder Factor ein Stift zu fügen, kann man zu dem Zeuge der beiden Fache das Zeug des Stiftes mit dem andern Fache fügen.

50. $e \cdot 1 = e \qquad 1 \cdot e = e$

Eins ändert, mit einem beliebigen Stifte gewebt (multiplicirt), den Werth desſelben nicht.

50b. $1 \cdot 1 = 1$

Eins ist diejenige Gröse, welche mit ſich ſelbst gewebt (oder multiplicirt) ſich nicht ändert.

51. $a \cdot 1 = a \qquad 1 \cdot a = a$

Eins ändert, mit einer beliebigen Gröse gewebt (oder multiplicirt) den Werth derſelben nicht.

Beweis: Nach Stiften oder elementar in Bezug anf a.

1. Der Satz gilt, wenn a nur ein Stift enthält (nach 50).
2. Wenn der Satz für eine beliebige Gröse a gilt (Annahme), ſo gilt er anch für $a + e$, welche ein Stift mehr enthält (Folgerung); denn

$$(a + e) \cdot 1 = a \cdot 1 + e \cdot 1 \qquad \text{(nach 49)}$$
$$= a + e \quad \text{(nach Annahme und nach 50)}$$

3. Alſo gilt der Satz nach 19 allgemein.

52. Geſetz des Webens (Multiplication im weiten Sinne).

In jeder Grösenknüpfung durch Weben (Multiplication im weiten Sinne) kann man ohne Aenderung des Werthes jede Plusklammer beliebig ſetzen oder weglassen und jede Beziehungsklammer auflöſen,

indem man jedes Stück des einen Fachs oder Factors mit jedem des andern bezieht und die Zeuge fügt; das Ergebniss ist wieder eine Stiftgrösse.

Beweis: Nach 49 gilt die Grundformel der einfachen Beziehung, alſo gilt nach Abschnitt 6 auch das Geſetz der Beziehung,

*) Mal, goth. mēl, ahd. māl stammt ab vom Urverb mal, sskr. mal, gr. myl-jō, lat. mol-es, goth. mal-an mahlen, malmen, dann Farben reiben malen. Es bezeichnet das gemalte Zeichen.

wie es in der No. 52 ausgesprochen ist, und da auserdem Fügung gilt, so kann man nach Abschnitt 7 auch die Plusklammer beliebig setzen oder weglassen.

53. $0 \cdot a = 0$ und $a \cdot 0 = 0$

Null giebt, mit jeder Gröse gewebt, Null.

Beweis: $ab = a(b + 0)$ (nach 43)

$= ab + a0$ (nach 52)

Mithin ist a0 eine Gröse, welche zu ab gefügt dies nicht ändert, d. h. es ist Null (nach 41).

54. Erklärung. Das Weben heist

Anweben, wenn nur Beziehung, nicht aber Einigung der Fache oder Factoren gilt,

Einweben, wenn auser der Beziehung Einigung dreier Stifte als Fache oder Factoren, nicht aber Vertauschung derselben gilt,

Verweben, wenn auser der Beziehung sowohl Einigung als Vertauschung der Stifte als Fache oder Factoren gilt.

55. Grundformel des Einwebens (Multiplication im mittlern Sinne).

$$e_1(e_2e_3) = e_1e_2e_3$$

Im Zeuge dreier Stifte (Producte dreier Elemente) kann man bei dem Einweben die Malklammer setzen oder weglassen.

56. $a(e_1e_2) = ae_1e_2$

Im Zeuge oder Producte einer Gröse und zweier Stifte kann man beim Einweben die Malklammer setzen oder weglassen, oder: Statt eine Gröse mit dem Zeuge zweier Stifte (Producte zweier Elemente) einzuweben, kann man sie mit den Stiften fortschreitend einweben.

Formelbeweis: Nach Stiften oder elementar in Bezug auf a.

1. Die Gleichung gilt, wenn a nur ein Stift enthält (nach 55).
2. Wenn die Gleichung für eine beliebige Gröse a gilt (Annahme), so gilt sie auch für die Gröse $a + e_3$, welche ein Stift mehr enthält (Folgerung); denn

$$(a + e_3)(e_1e_2) = a(e_1e_2) + e_3(e_1e_2) \quad \text{(nach 52)}$$
$$= ae_1e_2 + e_3e_1e_2 \quad \text{(nach Annahme und nach 55)}$$
$$= (a + e_3)e_1e_2 \quad \text{(nach 52)}$$

3. Also gilt die Gleichung nach 19 allgemein.

Beweis in Worten: Die Gröse a ist eine Summe von Stiften, das Zeug (e_1e_2) ist ein Stift nach 31. Dann wird nach 52 das Zeug $a(e_1e_2)$ eine Summe, deren Stücke sämmtlich Zeuge dreier Stifte sind. In diesen sämmtlich können nach 55 die Malklammern

gesetzt oder weggelassen werden; wir lassen sie daher weg. Endlich können, da in allen diesen Zeugen die beiden letzten Stifte $e_1 e_2$ dieselben sind, die ersten Stifte nach 52 wieder in eine Summe gefügt werden und geben dann wieder die erste Gröse a. Es ist dann aber diese Gröse fortschreitend mit den beiden Stiften eingewebt.

57. $a(be) = abe$

Im Zeuge oder Producte zweier Grösen und eines Stiftes (Elementes) kann man beim Einweben die Malklammer setzen oder weglassen, oder

Statt eine Gröse mit dem Zeuge oder Producte aus einer Gröse und einem Stifte einzuweben, kann man sie fortschreitend mit der Gröse und dem Stifte einweben.

Formelbeweis: Nach Stiften oder elementar in Bezug auf b.

1. Die Gleichung gilt, wenn b nur ein Stift enthält (nach 56).
2. Wenn die Gleichung für eine beliebige Gröse b gilt (Annahme), so gilt sie auch für die Gröse $b + e_1$, welche ein Stift mehr enthält (Folgerung); denn

$$\begin{aligned} a[(b + e_1)e] &= a[be + e_1 e] && \text{(nach 52)} \\ &= a(be) + a(e_1 e) && \text{(nach 52)} \\ &= abe + ae_1 e && \text{(nach Annahme und nach 56)} \\ &= (ab + ae_1)e && \text{(nach 52)} \\ &= a(b + e_1)e && \text{(nach 52)} \end{aligned}$$

3. Also gilt die Gleichung nach 19 allgemein.

Beweis in Worten: Ganz entsprechend wie zu No. 56

58. Gesetz des Einwebens (Multiplication im mittlern Sinne).

In jeder Grösenknüpfung durch Einweben kann man die Plusklammern und die Malklammern ohne Weiteres setzen oder weglassen und die Beziehungsklammern auflösen, indem man jedes Stück des einen Fachs oder Factors mit jedem des andern einwebt und die Zeuge fügt. Das Zeug ist wieder eine Stiftgröse.

Beweis: Nach 57 gilt die Grundformel der Einigung für Fache oder Factoren, also gilt nach Abschnitt 4 auch das Gesetz der Einigung für Fache oder Factoren. Die übrigen Theile des Satzes gelten aber nach dem Gesetze des Webens No. 52.

59. Grundformel des Verwebens (Multiplication im engen Sinne).

$$e_1 e_2 = e_2 e_1$$

Beim Verweben lassen sich zwei Stifte oder Elemente vertauschen.

60. Gefetz des Verwebens (Multiplication im engen Sinne).

In jeder Grösenknüpfung durch Verweben kann man ohne Aenderung des Werthes die Plusklammern und die Malklammern beliebig fetzen oder weglassen, die Ordnung der Fache oder Factoren beliebig ändern und die Beziehungsklammern auflöfen, indem man jedes Stück des einen Fachs oder Factors mit jedem des andern verwebt und die Zeuge fügt. Das Zeug ist wieder eine Stiftgröse.

Beweis: Nach 59 gilt die Grundformel der Vertauschung, alfo nach Abschnitt 5 auch das Gefetz der Vertauschung. Der übrige Theil des Satzes gilt nach dem Gefetze des Einwebens No. 58.

Abschnitt 9. Höhung (oder Potenzirung), der höchste Grad der Grösenknüpfung.

61. Erklärung. Höhung (oder Potenzirung im weiten Sinne) heist der dritte und höchste Grad der Grösenknüpfung, die erste Gröse heist Bafe, die zweite heist Stufe oder Exponent, das Erzeugniss heist Höhe oder Potenz, fofern für den zweiten Grad der Grösenknüpfung Einigung, für den dritten Grad der Grösenknüpfung die Grundformel der Doppelbeziehung gilt, d. h.

fofern statt zu der Gröse der Stufe ein Stift zu fügen, man die Höhe der beiden Grösen mit der Höhe aus der Bafe und dem Stifte der Stufe einweben kann.

fofern statt zu dem Exponenten ein Element zu addiren, man die Potenz der beiden Grösen mit der Potenz aus der Bafe und dem Elemente des Exponenten multipliciren kann.

Zum Zeichen der Höhung schreibt man die Stufe rechts oben von der Bafe und liest das Zeichen „hoch“ oder „zur —ten“ (z. B. a^b gelefen a hoch b oder a zur bten, und zwar ist hier a die Bafe, b die Stufe oder der Exponent, a^b die Höhe oder Potenz.

Eine Klammer heist, wenn fie die Bafe umfasst, eine Bafenklammer, wenn fie die Stufe oder den Exponenten umfasst, eine Stufenklammer; die Höhe, welche entsteht, wenn man eine beliebige Gröse a zur Eins höht, wird der Gröse a gleich gefetzt.

62. $a^{b+e} = a^b \cdot a^e$

Statt zu der Stufe ein Stift zu fügen, kann man die Höhe der beiden Grösen mit der Höhe aus

Statt zu dem Exponenten ein Element zu addiren, kann man die Potenz der beiden Grösen

der Bafe und dem Stifte der Stufe einweben.

mit der Potenz aus der Bafe und dem Elemente des Exponenten multipliciren.

63. $a^1 = a$

Eine Gröse mit Eins höhen ändert die Gröse nicht.

64. $1^1 = 1$

Eins ist diejenige Gröse, welche mit fich felbst gehöht (oder potenzirt) fich nicht ändert.

65. $a^0 = 1$

Jede Gröse giebt mit Null gehöht Eins.

Beweis: Es ist $a^c = a^{0+c}$ (nach 43)

$= a^0 \cdot a^c$ (nach 62)

Alfo ist a^0 eine Gröse, welche mit jeder beliebigen Gröse gewebt diefelbe nicht ändert, d. h. es ist $a^0 = 1$ (nach 48).

66. Die Höhe oder Potenz zweier Stiftgrösen ist wieder eine Stiftgröse.

Beweis: Unmittelbar aus No. 34.

67. $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$

Statt in der Stufe zwei Grösen zu fügen, kann man die beiden Höhen aus der Bafe uud den einzelnen Grösen der Stufe mit einander einweben, und — Zwei Höhen gleicher Bafe webt man, indem man bei derfelben Bafe die Stufen fügt.

Statt in dem Exponenten zwei Grösen zu addiren, kann man die beiden Potenzen aus der Bafe und den einzelnen Grösen des Exponenten mit einander multipliciren, und — Zwei Potenzen gleicher Bafe multiplicirt man, indem man bei derfelben Bafe die Exponenten addirt.

Beweis: Unmittelbar aus No. 35.

68. Gefetz der Höhung (Potenzirung im weiten Sinne).

$$a^{S_{1,n} b_b} = P_{1.n}(a^{b_b})$$

In jeder Grösenknüpfung durch Höhung kann mau die Stufenfumme auflöfen,

indem man die Bafe zu den einzelnen Stücken der Stufe höht und die Höhe webt. Die Höhe ist wieder eine Stiftgröse.

indem man die Bafe mit den Stücken des Exponenten einzeln potenzirt nnd die Potenzen multiplicirt. Die Potenz ist wieder eine Elementargröse.

Beweis: Unmittelbar aus No. 36.

69. Erklärung. Die Höhung heist **Anhöhung**, wenn nur Beziehung gilt, die Höhung heist **Einhöhung**, wenn die Gleichungen $(ab)^e = a^e \cdot b^e$ und $a^{e_1 e_2} = (a^{e_1})^{e_2}$ gelten, d. h.

wenn 1. statt das Zeug zweier Grösen mit einem Stifte zu höhen, man die beiden Grösen einzeln höhen und die Höhen einweben kann, und

2. statt eine Gröse mit dem Zeuge zweier Stifte zu höhen, man die Baſe fortschreitend mit den Stiften der Stufe höhen kann;

wenn 1. statt das Product zweier Grösen mit einem Elemente zu potenziren, man die beiden Grösen einzeln potenziren und die Potenzen multipliciren kann, und

2. statt eine Gröse mit dem Producte zweier Elemente zu potenziren, man die Gröse fortschreitend mit den Elementen des Exponenten potenziren kann.

Die Einhöhung heist endlich Erhöhung, wenn für die Baſe und die Stufe oder den Exponenten Verweben gilt.

70. $(ab)^e = a^e b^e$

Das Zeug zweier Grösen höht man mit einem Stifte ein, indem man jede Gröse der Baſe einzeln mit dem Stifte einhöht und die Höhen einwebt.

Das Product zweier Grösen potenzirt man mit einem Elemente, indem man jede Gröse der Baſe einzeln mit dem Elemente potenzirt und die Potenzen multiplicirt.

71. $a^{e_1 e_2} = (a^{e_1})^{e_2}$

Eine Gröse höht man mit dem Zeuge zweier Stifte ein, indem man die Baſe mit den Stiften fortschreitend einhöht.

Eine Gröse potenzirt man mit dem Producte zweier Elemente, indem man die Baſe mit den Elementen fortschreitend potenzirt.

72. Die Grundformeln der Einhöhung gelten stets, wenn in der Stufe nur Eins als Stift oder Element vorkommt.

Beweis: 1. Es ist $(ab)^1 = ab$ (nach 63)

$= a^1 b^1$ (nach 63)

2. Es ist $a^{1 \cdot 1} = a^1$ (nach 50 b)

$= (a^1)^1$ (nach 63)

Alſo gelten bei Eins als Stufe beide Grundformeln der Einhöhung.

73. $a^{bc} = (a^b)^c$

Eine Gröse höht man zu dem Zeuge zweier Grösen ein, indem man die Baſe zu den Grösen der Stufen fortschreitend einhöht.

Eine Gröse potenzirt man mit dem Producte zweier Grösen, indem man die Baſe mit den Grösen des Exponenten fortschreitend potenzirt.

Beweis: Der Beweis zerfällt in zwei Theile. Es muss nämlich bewieſen werden, dass die Gleichung gilt,

a. wenn man eine Gröse mit dem Zeuge einer Gröse und eines Stiftes einhöht, d. h. dass

$$a^{be} = (a^b)^e \text{ und}$$

b. wenn man eine Gröse mit dem Zeuge zweier Grösen einhöht, d. h. dass $a^{bc} = (a^b)^c$.

α. Nach Stiften oder elementar in Bezug auf b.

1. Die Gleichung $a^{be} = (a^b)^e$ gilt, wenn b nur ein Stift enthält (nach 71).
2. Wenn die Gleichung gilt für ein beliebiges b (Annahme), fo gilt fie auch für $b + e_1$, welche ein Stift mehr enthält (Folgerung); denn

$$\begin{aligned} a^{(b+e_1)e} &= a^{be+e_1e} && \text{(nach 52)} \\ &= a^{be}a^{e_1e} && \text{(nach 67)} \\ &= (a^b)^e(a^{e_1})^e && \text{(nach Annahme u. nach 71)} \\ &= (a^b a^{e_1})^e && \text{(nach 70)} \\ &= (a^{b+e_1})^e && \text{(nach 67)} \end{aligned}$$

3. Alfo gilt die Gleichung nach 19 allgemein.

b. Nach 73a gilt die Grundformel der Einigung, alfo gilt ganz entsprechend dem Abschnitt 4 auch das Gefetz der Einigung, alfo ist auch $a^{bc} = (a^b)^c$ (nach 24).

74. Gefetz der Einhöhung (Potenzirung im mittlern Sinne).

In jeder Grösenknüpfung durch Einhöhung kann man die Stufenfumme auflöfen, indem man die Bafe zu den einzelnen Stücken der Stufe einhöht und die Höhen einwebt, und kann man das Stufenzeug auflöfen, indem man die Bafe fortschreitend zu den Grösen der Stufe einhöht. Die Höhe ist wieder eine Stiftgröse.

In jeder Grösenknüpfung durch Potenziren im mittleren Sinne kann man die Exponentenfumme auflöfen, indem man die Bafe mit den Stücken des Exponenten einzeln potenzirt und die Potenzen multiplicirt, und kann man das Exponentenproduct auflöfen, indem man die Bafe mit den Factoren des Exponenten fortschreitend potenzirt. Die Potenz ist wieder eine Elementargröse.

Beweis: Unmittelbar aus 73, entsprechend dem Abschnitt 4 und aus 68.

75. Hauptformel der Erhöhung (Potenzirung im engen Sinne).

$$(ab)^c = a^c \cdot b^c.$$

Das Zeug zweier Grösen erhöht man mit einer Gröse, in-

Das Product zweier Grösen potenzirt man mit einer Gröse,

dem man die beiden Grösen zu der Stufe erhöht und die Höhen verwebt.

indem man die Factoren mit dem Exponenten potenzirt und die Potenzen multiplicirt.

Beweis: Nach Stiften oder elementar in Bezug auf c.

1. Die Gleichung gilt, wenn c nur ein Stift enthält, nach 72.
2. Wenn die Gleichung für eine beliebige Gröse c gilt (Annahme), fo gilt fie auch für die Gröse $c + e$, welche ein Stift mehr enthält (Folgerung); denn

$$(ab)^{c+e} = (ab)^c \cdot (ab)^e \quad \text{(nach 67)}$$
$$= a^c b^c a^e b^e \quad \text{(nach Annahme und nach 72)}$$
$$= (a^c a^e)(b^c b^e) \quad \text{(nach 60, da nach 69 Verwebung gilt)}$$
$$= a^{c+e} b^{c+e} \quad \text{(nach 67)}$$

3. Alfo gilt die Gleichung nach 19 allgemein.

76. $(a^b)^c = (a^c)^b$

Die Ordnung in welcher man fortschreitend erhöht oder potenzirt, kann man ohne Aenderung des Werthes beliebig ändern.

Beweis: $(a^b)^c = a^{bc}$ (nach 73)
$= a^{cb}$ (nach 60)
$= (a^c)^b$ (nach 73)

77. Gefetz der Erhöhung (Potenzirung im engen Sinne).

In jeder Grösenknüpfung durch Erhöhung kann man jedes Bafenzeug auflöfen, indem man die Fache der Bafe zu der Stufe erhöht und die Höhen verwebt, kann man jede Stufenfumme auflöfen, indem man die Bafe zu jedem Stücke der Stufe erhöht und die Höhen verwebt, und kann man jedes Stufenzeug auflöfen, indem man die Bafe fortschreitend zu den Fachen der Stufe erhöht. Die Ordnung, in welcher man fortschreitend erhöht, ist beliebig. Die Höhe ist wieder eine Stiftgröse.

In jeder Grösenknüpfung durch Potenzirung im engen Sinne kann man das Bafenproduct auflöfen, indem man die Factoren mit dem Exponenten potenzirt und die Potenzen multiplicirt, kann man die Exponentenfumme auflöfen, indem man die Bafe mit den Stücken potenzirt und die Potenzen multiplicirt, und kann man das Exponentenproduct auflöfen, indem man die Bafe fortschreitend mit den Factoren potenzirt. Die Ordnung, in welcher man fortschreitend potenzirt, ist beliebig. Die Potenz ist wieder eine Elementargröse.

78. Grenzen der Grösenlehre.

Die Höhung oder Potenzirung ist der höchste Grad der Grösenknüpfung, und kann es keinen höhern Grad der Grösenknüpfung geben.

Beweis: „Sollte es einen höhern Grad der Grösenknüpfung geben als die Höhnng (Potenzirung)", ſo müsste für den erstern Beziehung stattfinden (nach 31). Sollte aber eine Beziehung stattfinden, ſo müsste nach 31 für den niedern Knüpfungsgrad mindestens Einigung gelten. Für die Baſe und die Stufe gilt aber weder Einigung noch Vertauschung; denn ſollte Einignng gelten, ſo müsste $a^{(b^{c+d})} = (a^b)^{c+d}$ ſein, es ist aber $a^{(b^{c+d})} = a^{(b^c)(b^d)} = (a^{(b^c)})^{(b^d)}$, dagegen $(a^b)^{c+d} = ((a^b)^c)((a^b)^d)$, und ebenſo ist a^b und b^a verschieden. Alſo gilt für Baſe und Stufe keine Einigung, alſo giebt es auch keinen höhern Grad der Grösenknüpfung, für welchen Beziehung gelten könnte, ſondern die Höhung ist der höchste Grad der Grösenknüpfung.

Abschnitt 10. Die vier Zweige der Formenlehre.

79. Die Grösenlehre lehrt uns die allgemeinen Knüpfungen der Grösen, ſie ist daher die eigentliche Grundlage der ganzen Formenlehre, der Stamm, welcher die einzelnen Zweige trägt. Die übrigen Zweige können nur hervortreten, wenn auser dieſen allgemeinen Geſetzen der Knüpfung für eine jede noch beſondere Geſetze stattfinden.

Die Grundformeln dieſer beſondern Knüpfungen ergeben ſich aus dem Verhältnisse der Knüpfung zweier gleichen Stifte oder Elemente. Ist die Knüpfung zweier gleichen Stifte wieder dieſem Stifte gleich, d. h. ist $e \circ e = e$, ſo nennen wir die Knüpfung eine **innere**, ist ſie dieſem Stifte ungleich, d. h. ist $e \circ e \gtrless e$, ſo nennen wir ſie eine **äusere**.

Hiernach unterscheiden wir vier Arten der Knüpfung:

Innere Zufügung (Addition) $e + e = e$,
Aeusere Zufügung (Addition) $e + e \gtrless e$,
Innere Webung (Multiplication) $ee = e$,
Aeusere Webung (Multiplication) $ee \gtrless e$

und erhalten dadurch vier Zweige der Formenlehre,

1. die **Begriffslehre** oder **Logik**, ſofern

$$e + e = e \qquad e \cdot e = e$$

2. die **Bindelehre** oder **Systematik** (Combinationslehre), ſofern $e + e = e \quad e \cdot e \gtrless e$

3. die **Zahlenlehre** oder **Arithmetik**, ſofern

$e + e \gtrless e \quad e \cdot e = e$

4. die **Ausenlehre** oder **Ausdehnungslehre**, ſofern

$e + e \gtrless e \quad e \cdot e \gtrless e$

Soll es ausdrücklich bezeichnet werden, dass eine Gleichung nur für einen dieſer Zweige gilt, ſo wird über das Gleichheitszeichen ein b, i, z oder a geſetzt (z. B. $aa \overset{b}{=} a$, geleſen aa für Begriffe gleich a, oder aa begrifflich a). Gilt für die Stifte oder Elemente die äusere Zufügung, ſo heisen die Stifte Einheiten.

Die

Begriffslehre oder Logik.

Zweites Buch

der

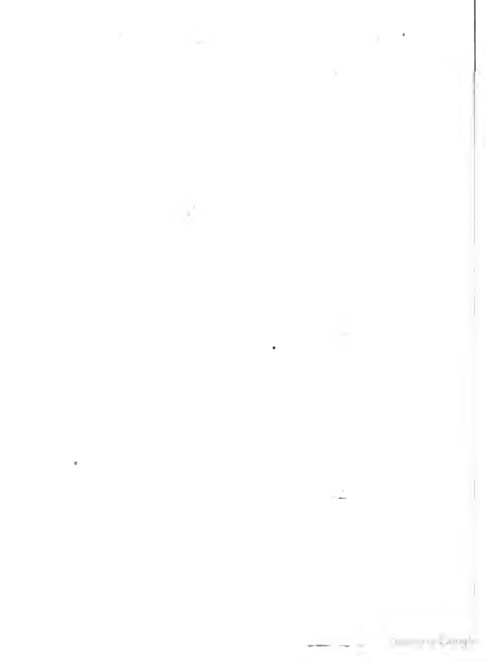
Formenlehre oder Mathematik.

Von

Robert Grassmann.

Stettin, 1872.

Druck und Verlag von R. Grassmann.



Einleitung
in die Begriffslehre oder Logik.

Der Vater der **Begriffslehre**[1]) oder Logik ist der Grieche **Aristotélēs**, welcher bereits 350 Jahre vor Chr. die weſentlichen Sätze der Begriffslehre in ſeinem órganon vorgetragen hat. Derſelbe behandelt in dem Buche katēgoríai die Wortklassen der Sprachlehre, in dem Buche perí hermēneías die Satzlehre, in dem Buche perí ſophistikôn elénchōn die Trugschlüsse, in den acht Büchern tôn topikôn das Bedenken oder reflectirende Denken und endlich in den vier Büchern tôn analytikôn die Begriffs- und Schlusslehre, die Logik im jetzigen Sinne. Dieſe Schlusslehre mit der Umkehr der Urtheile, mit Entwicklung der Schlussfiguren u. ſ. w. ist, wie Aristotélēs ſelbst ſagt, die eigene Arbeit desſelben, für welche er gar keine Vorarbeiten in den Werken früherer Philoſophen vorfand, und ist mit bewunderungswürdigem Scharfſinne ausgeführt. Aristotélēs geht bei der Entwicklung von der Erfahrung aus und arbeitet, indem er mit dem Verstande zergliedert und auflöst; ſein Werk wird daher, wie Hegel ſagt, eine Naturgeschichte des Denkens, welche für alle Zeiten Werth behalten wird. Eine Ableitung der einzelnen Schlussformen durch Formeln giebt er nicht.

Nach dem Aristotélēs ward von den **Schülern** desſelben, den Kommentatoren Alexander Aphrodisiensis und Boëthius unter den Alten, einem Avicenna und Averrhoes unter den Arabern, einem Albertus magnus, Duns Scotus und Thomas von Aquinas unter den Scholastikern, einem Peter Ramus und Philippus Melanchthon zur Zeit der Reformation die Begriffslehre nicht weſentlich gefördert, ſondern verlor ſich mehr und mehr in zahlloſe Unterscheidungen.

Erst mit dem Erwachen des philoſophischen Geistes in Deutschland beginnt auch für die Logik wieder eine lebendigere Entwicklung. Zuerst ſuchte **Chr. Wolf** in ſeiner Logica 1728 die Methode des Beweiſes in die Logik einzuführen; aber ſeine ſogenannten Beweiſe enthalten nichts als Formeln und Phraſen, welche um die Sache herum, statt in ſie einführen, welche verdunkeln, statt erhellen. Sie verdienen den Tadel, welchen Hegel in ſeiner Geschichte der Philoſophie B. 3 S. 480 über ſie ausspricht.

Viel bedentender war, was **Immanuel Kant** in ſeiner Logik 1800 bot. Auch er beſolgt, wie Aristotélēs, den beschreibenden Weg und zählt

[1]) **Begriff** stammt ab vom Urverb grabh, grab, sskr. grabh, grah, lit. grēb-iù fassen, zuſammenfassen, goth. greip-an, grip-an, agſ. grip-an, gra-pan, ahd. grif-an, nhd. greifen zuſammenfassen. Der Begriff ist alſo das Zuſammengefasste, die Summe mehrer Vorstellungen.

die Unterscheidungen der Begriffe, der Urtheile und Schlüsse auf, ohne sie zu begründen; aber darin steht er weit hinter Aristotélēs zurück, dass er in seinen Erklärungen nicht immer die erforderliche Schärfe und Klarheit besitzt, dass er theilweise sprachliche und begriffliche Form vermengt, und dass er seine vorgefassten Ansichten auch in die Logik hineinträgt, so dass diese dadurch vom richtigen Wege abgeleitet wurde. Als Beispiel seiner Art zu erklären führe ich die Erklärung des Urtheils an: Ein Urtheil ist die Vorstellung der Einheit des Bewusstseins verschiedener Vorstellungen oder die Vorstellung des Verhältnisses derselben, sofern sie einen Begriff ausmachen. Als Beispiel der Vermengung sprachlicher und begrifflicher Unterschiede die Unterscheidung der allgemeinen, besondern und einzelnen, der kategorischen, hypothetischen und disjunctiven Urtheile.

Noch weniger hat Hegel mit seiner Logik 1812 genützt, dessen Trugschlüsse und willkürliche Behauptungen der Wissenschaft unendlich geschadet haben. Wer die Ergebnisse der bisherigen Logik kennen lernen will, der findet sie in Lambert Neues Organon 1764, wie in Twesten Logik 1825.

Alle diese Bearbeitungen der Logik beschränken sich aber auf eine Aufzählung der bisher aufgestellten Unterschiede, ohne dieselben abzuleiten, alle beschränken sich auf Erklärungen, welche, weil in Worten gegeben, mehre Werthe gestatten, theilweise undeutlich und unbestimmt sind, alle geben, wenn sie einen Beweis liefern, nur Trugschlüsse, indem sie die Methode des Beweises in Worten bereits voraussetzen, welche durch die Logik erst bewiesen werden soll, indem sie also gerade das voraussetzen, was sie beweisen wollen, alle endlich verkennen das rein formale Wesen der Logik, und dass sie nichts anderes ist, als ein Theil der Formenlehre oder Mathematik. Nur Aristotélēs macht auch in diesem Punkte eine rühmliche Ausnahme und kann auch heute noch jedem, der Schärfe im Denken erlangen will, nicht genug empfohlen werden.

Um die Begriffslehre oder Logik wissenschaftlich zu begründen, müssen wir einen neuen, und zwar den Weg der reinen Formeln einschlagen und alle Beweise in Gleichungen geben, welche nach den Gesetzen der Grösenlehre umgestaltet werden. Denn nur diese Form der Beweise setzt keine Logik, setzt keine Grammatik voraus, nur sie allein kann eine strenge Form des Denkens ergeben, da in ihr allein jede Gröse und jede Verknüpfung nur einen Werth besitzt, nur sie allein gilt allgemein für alles Denken, da in ihr jede Gröse alles bezeichnen kann, was Gegenstand des Denkens ist oder werden kann.

Die Begriffslehre oder Logik bildet den zweiten Zweig der Formenlehre oder Mathematik, sie geht also bereits auf die Erklärungen und Gesetze der Grösenlehre zurück. Setzt man jedoch die einfachen Gesetze der Zufügung oder Addition und der Verwebung oder Multiplication, die jeder beim Rechnenunterrichte für Zahlen gelernt hat, auch für Buchstaben als bekannt voraus, so kann man die Logik beginnen, ohne auf die Grösenlehre zurück gehen zu müssen.

Auch in der Logik nämlich gelten alle Gesetze der Zufügung oder Addition. So ist der Begriff „Karl und Heinrich" gleich dem Begriffe „Heinrich und Karl", es gilt also auch in der Logik das Gesetz der Vertauschung $a + b = h + a$. So ist der Begriff „Karl, Heinrich und August" gleich dem Begriffe „Karl nebst Heinrich und August", es gilt also auch in der Logik

das Gesetz der Einigung oder Klammerlösung $a+b+c=a+(b+c)$, d. h. es gelten alle Gesetze der Zufügung oder Addition.

Ebenso gelten in der Logik aber auch alle Gesetze der Verwebung oder Multiplication. Denn es ist der Begriff „der alte, tapfere König" gleich dem Begriffe „der alte König und der tapfere König", es gilt also auch in der Logik das Gesetz der Beziehung $(a+b)c=ac+bc$, und ebenso ist der Begriff „die grünen Felder und Wiesen" gleich dem Begriffe „die grünen Felder und die grünen Wiesen", und gilt also auch das Gesetz $a(b+c) = ab+ac$. So ist ferner der Begriff „der grose Mensch" gleich dem Begriffe „der Mensch, welcher gros ist", und gilt also auch für die Verwebung oder Multiplication die Vertauschung $ab=ba$, und ist endlich der Begriff „das grose säugende Thier" gleich dem Begriffe „das grose Säugende, welches ein Thier ist" und gilt also auch für die Verwebung oder Multiplication die Einigung $a(bc)=abc$. Es gelten mithin für die Begriffslehre oder Logik alle in der Gröseplehre entwickelten Gesetze der Zufügung oder Addition und der Verwebung oder Multiplication. In der Sprache wird übrigens das Zeichen der Zufügung durch ein Komma oder durch das Wort „und" bezeichnet und das Zeichen der Verwebung oder Multiplication durch die Form des Beinamens (Adjectivs) oder des Beisatzes (Adjectivsatzes), der in Geschlecht, Zahl und Casus mit seinem Dingnamen (Substantiv) übereinstimmt.

Die Begriffslehre oder Logik hat aber auser diesen allgemeinen Gesetzen der Zufügung und Verwebung, welche sie mit allen Zweigen der Formenlehre oder Mathematik gemein hat, noch besondere Gesetze, durch welche sie sich von den andern Zweigen unterscheidet. Diese besondern Gesetze der Logik bestehen darin, dass zwei gleiche Begriffe einander zugefügt (addirt) oder verwebt (multiplicirt) wieder denselben Begriff geben. So ist der Begriff „Karl und Karl" gleich dem Begriffe „Karl", d. h. es ist $a+a=a$; ebenso ist der Begriff „der Mensch, welcher Mensch ist" gleich dem Begriffe „der Mensch", d. h. es ist $aa=a$. Die Logik ist also ein besonderer Zweig der Formenlehre, und zwar der erste und innerlichste.

Die Begriffslehre oder Logik entwickelt sich daher auch, wie jeder andere Zweig der Formenlehre, rein in Formeln. Aber wenn für irgend einen Zweig der Formenlehre, so sind für die Logik zahlreiche Uebungen in Beispielen erforderlich, damit jeder lerne die Gesetze der Logik in gewöhnliche Sprache und Denkform zu übersetzen und auf das gewöhnliche Denken und Wissen fruchtbringend anzuwenden. Die bei jedem Satze aufgestellten Beispiele sollen diese Uebungen andeuten und die geehrten Leser anregen, aus ihrem Kreise des Denkens zahlreiche Beispiele zu bilden, damit ihnen die Gesetze lebendig und nicht wie eine todte Form erscheinen.

Was die Entwicklung betrifft, so zerfällt die Begriffslehre in drei Abschnitte: in Begriffsbildung, in Urtheilsbildung und in Schlussbildung. Der erste Abschnitt oder die Begriffsbildung beginnt mit der Erklärung, dass für Stifte oder Elemente $e+e=e$, $ee=e$ und $e_1e_2=0$ gesetzt werden und leitet daraus ab, dass jede Summe und jedes Zeug oder Product gleicher Begriffe wieder derselbe Begriff ist, dass dagegen das Zeug oder Product zweier Begriffe, welche kein Stift oder Element gemein haben, Null ist.

Demnächst wird abgeleitet, dass die Summe zweier Begriffe die Summe sämmtlicher in den beiden Begriffen enthaltener verschiedener Stifte oder Elemente ist, dass dagegen das Zeug oder Product zweier Begriffe die

Summe fämmtlicher den beiden Begriffen gemeinfamer Stifte ist und hierauf der Umfang des Begriffes als die Summe feiner Stifte, der Inbalt des Begriffes als das Zeug oder Product feiner Merkmale oder Bestimmungen erklärt.

Es folgen darauf die Erklärnngen der deckenden, identiscben oder gleichen Begriffe, wo der eine dem andern gleicb ist, der eingeordneten oder incidenten Begriffe, wo der eine ein Stück des andern ist, der scbneidenden oder fecanten Begriffe, wo beide gemeinfame und cigenthümlicbe Stifte oder Elemente enthalten, und der getrennten oder disjuncten Begriffe, wo beide kein Stift gemeinfam haben. Es folgen ferner die Erklärungen des Alls oder der Totalität, welche alle Stifte enthält, und des Nicht-a, welches alle Stifte enthält, welcbe dem a fehlen, fowie die des Hauptbegriffes und der Ergänsung sum Hauptbegriffe. Eine reicbe Zahl von Sätzen leitet aus diefen Erklärungen die Eigenscbaften und Gefetze diefer Begriffe auf streng mathematische Weife in Formeln ab und seigt uns die Fruchtbarkeit des betretenen Weges.

In dem sweiten Abschnitte, der Urtheilsbildung, wird sunächst das Urtheil, s. B. Karl ist ein Mensch, auf die Gleichung a = xb surückgeführt, wo jede Gröse einen bestimmten Werth hat, dadurch wird es möglich, die Urtheile streng wissenschaftlich su bebandeln und die Unterschiede der Sätse, welche der sprachlichen Form angebören, von den begrifflichen su scbeiden. Der Begriff a beist der Dingbegriff oder Subjectsbegriff, der Begriff b der Thatbegriff oder Prädicatsbegriff.

Ueber die Eintheilnng der Urtbeile, über die Ableitung der Gefetze für die Urtheile, über die Scblussbildung und Scblussformen muss ich alle, welcbe die Sache kennen lernen wollen, auf die Logik felbst verweifen. Hier fei nur bemerkt, dass auch die Urtbeile und Schlüsse mit negativem Subjecte in die Logik aufgenommen werden mussten, da fie eben fo fichere Schlüsse zulassen, wie jedes andere Urtheil und erst durch die Einführung derfelben die Logik die Allgemeinbeit und wissenschaftliche Scbärfe gewinnt, welche ihr gebührt.

Aucb in der Begriffslehre oder Logik find alle Kunstausdrücke rein dentsch gebildet.

Abschnitt 1. Begriffsbildung.

1. Erklärung. Die Begriffslehre oder Logik (logikė) ist ein Theil der Formenlehre, und gelten für dieselbe folgende Erklärungen der Grösenlehre.

Gröse heist jedes, was Gegenstand des Denkens ist oder werden kann, sofern es nur einen und nicht mehre Werthe hat. Das Zeichen der Gröse ist der Buchstabe. Derselbe Buchstabe bezeichnet in derselben Nummer der Begriffslehre stets eine und dieselbe Gröse; im Uebrigen kann jeder Buchstabe jede beliebige Gröse bezeichnen. Ein Satz, der für einen Buchstaben bewiesen ist, gilt mithin für jede Gröse, welche der Buchstabe bezeichnen kann, d. h. für jede beliebige Gröse.

Stift oder Element heist eine Gröse, welche ursprünglich gesetzt ist, und welche also nicht durch Knüpfung andrer Grösen entstanden ist. Der Buchstabe e ist Zeichen der Stifte. (Die ursprünglichen Stifte des Weltalls sind die von Gotte gesetzten Körperwesen, Etherwesen und Geisteswesen, aus deren Zusammensetzung das ganze Weltall besteht.)

Knüpfung heist jede Zusammenstellung oder Verbindung von Grösen, welche dem Geiste des Menschen möglich ist, sofern sie nur einen und nicht mehre Werthe hat. Dasselbe Knüpfungszeichen bezeichnet in derselben Nummer der Begriffslehre stets eine und dieselbe Knüpfung; im Uebrigen kann jedes Knüpfungszeichen, wenn nichts anderes festgesetzt ist, jede beliebige Art der Knüpfung bezeichnen. Ein Satz, der für ein Knüpfungszeichen bewiesen ist, gilt mithin für jede beliebige Art der Knüpfung.

Die Klammer ist das Zeichen, dass die in die Klammer eingeschlossenen Grösen zuvor zu einem Gesammte geknüpft werden sollen, ehe dies mit der Gröse auser der Klammer geknüpft werden darf. Stehen mehre Grösen ohne Klammer, so sollen dieselben fortschreitend geknüpft werden, d. h. es soll zunächst die erste

mit der zweiten und dann jedesmal das Gesammt mit der nächstfolgenden Gröse geknüpft werden.

Gleich heisen zwei Grösen, wenn man in jeder Knüpfung der Begriffslehre die eine statt der andern ohne Aenderung des Werthes setzen kann. Das Zeichen der Gleichheit ist $=$. Ungleich heisen zwei Grösen, wenn man in keiner Knüpfung der Formenlehre die eine statt der andern ohne Aenderung des Werthes setzen kann. Das Zeichen der Ungleichheit ist $\gtrless$.

Die Stiftgrösen oder Elementargrösen, d. h. die durch fortschreitende Zufügung (Addition) der Stifte erzeugten Grösen, heisen in der Begriffslehre Begriffe (hóros, katálepsis, notio, conceptus). Die Fache oder Factoren heisen Merkmale oder Bestimmungen (nota, differentia). Das Zeichen des Zufügens (Addirens) wird in der Begriffslehre gelesen „und", das des Verwebens (Multiplicirens), welches hier Bestimmen genannt wird, wird „mal" gelesen, in der Sprache erhält das Merkmal die Form des Beinamens (Adjectivs) oder des Beisatzes (Adjectivsatzes).

2. Auch in der Begriffslehre oder Logik gelten die Grundformeln und daraus abgeleitet die Gesetze der Grösenlehre, d. h. man kann ohne Aenderung des Werthes

1. jede Plus- und Malklammer beliebig setzen oder weglassen und die Ordnung der Stücke und der Merkmale (Factoren) beliebig ändern,
2. jede Beziehungsklammer auflösen, indem man jedes Stück des einen Merkmals mit jedem des andern verwebt (multiplicirt),
3. Null (0) zu jeder Gröse zufügen (addiren) und Eins (1) mit jeder Gröse verweben (multipliciren) ohne Aenderung des Werthes; das Zeug oder Product jeder Gröse mit Null ist Null,
4. das Ergebniss jeder Knüpfung ist wieder ein Begriff oder eine Elementargröse.

3. Für die Begriffslehre oder Logik gelten folgende besondere Gesetze:

1. die Summe und das Zeug oder Product zweier gleichen Stifte (Elemente) giebt wieder dasselbe Stift und
2. das Zeug oder Product zweier verschiedenen Stifte ist Null.

4. $e + e = e \qquad e \cdot e = e \qquad e_1 \cdot e_2 = 0.$

Die begriffliche Summe und das begriffliche Zeug oder Product zweier gleicher Stifte ist wieder dasselbe Stift. Das begriffliche Zeug oder Product zweier verschiedener Stifte ist Null.

5. Satz der Gleichheit oder Identität:

$$a = a \qquad a + a = a \qquad a \cdot a = a.$$

Jeder Begriff ist sich selbst gleich. Die Summe und das Zeug oder Product zweier gleicher Begriffe ist wieder derselbe Begriff.

Beweis a. Es sei $a = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$, so ist

$$\begin{aligned} a + a &= (e_1 + e_2 + \cdots + e_n) + (e_1 + e_2 + \cdots + e_n) \\ &= (e_1 + e_1) + (e_2 + e_2) + \cdots + (e_n + e_n) \quad \text{(nach 2)} \\ &= e_1 + e_2 + \cdots + e_n \quad \text{(nach 4)} \\ &= a \end{aligned}$$

Beweis b. Es sei $a = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$, so ist

$$\begin{aligned} a \cdot a &= (e_1 + e_2 + \cdots + e_n)(e_1 + e_2 + \cdots + e_n) \\ &= \left.\begin{matrix} e_1e_1 + e_1e_2 + \cdots + e_1e_n \\ + e_2e_1 + e_2e_2 + \cdots + e_2e_n \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ + e_ne_1 + e_ne_2 + \cdots + e_ne_n \end{matrix}\right\} \text{(nach 2 oder nach 50 der Grösenlehre)} \\ &= e_1e_1 + e_2e_2 + \cdots + e_ne_n \quad \text{(nach 4, da } e_1e_2 = 0) \\ &= e_1 + e_2 + \cdots + e_n \quad \text{(nach 4, da } e \cdot e = e) \\ &= a \end{aligned}$$

Beispiele: Der Begriff Mensch wird dadurch, dass ich den Begriff Mensch hinzufüge, nichts anderes, sondern bleibt der Begriff Mensch.

Ebenso ist der Mensch, welcher Mensch ist, nichts anderes als der Mensch, oder der Begriff Mensch wird durch die Bestimmung, dass er Mensch sein solle, nichts anderes, sondern bleibt der Begriff Mensch.

Herbart drückt den Satz also aus: „Zwei Begriffe können nicht voll„kommen gleich sein, sondern jeder ist gleichsam nur in einem einzigen „Exemplare vorhanden. Dagegen kann das Denken eines und desselben Be„griffes vielmal wiederholt, bei sehr verschiedenen Gelegenheiten erzeugt und „hervorgerufen, von unzähligen Vernunftwesen vorgenommen werden, ohne „dass der Begriff hierdurch vervielfältigt würde". Einleitung in die Philosophie 4. Ausg. §. 35.

6. $S_{1,n}a = a \qquad P_{1,n}a = a$

Jede Summe und jedes Zeug oder Product gleicher Begriffe ist wieder derselbe Begriff.

Beweis a. Fortleitend oder inductorisch in Bezug auf $S_{1,n}a$.

1. Wenn $S_{1,n}a$ nur zwei Stücke enthält, so ist $a + a = a$ (nach 5)
2. Wenn $S_{1,n}a$ n Stücke enthält, so ist, sobald $S_{1,n}a = a$ (Annahme), auch $S_{1,n}a + a = a$ (Folgerung); denn

$$\begin{aligned} S_{1,n}a + a &= a + a \quad \text{(nach Annahme)} \\ &= a \quad \text{(nach 5)} \end{aligned}$$

3. Also gilt der Satz nach No. 18 der Grösenlehre allgemein für alle Summen $S_{1,n}a = a$.

Beweis b. Ganz ebenso folgt $P_{1,n}a = a$.

7. Satz des Widerspruches. Wenn a und b kein Stift (Element) gemein haben, so ist

$$a \cdot b = 0.$$

Das Zeug oder Product zweier Begriffe, welche kein Stift gemein haben, ist Null.

Beweis. Da die Begriffe a und b kein Stift gemein haben, so setze ich

$$a = e_1 + e_2 + \cdots + e_n \qquad b = e'_1 + e'_2 + \cdots + e'_m,$$

wo alle Stifte von einander verschieden sind; dann ist

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (e_1 + e_2 + \cdots + e_n)(e'_1 + e'_2 + \cdots + e'_m) \\ &= e_1e'_1 + e_1e'_2 + \cdots + e_1e'_m \\ &\quad + e_2e'_1 + e_2e'_2 + \cdots + e_2e'_m \\ &\quad\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ &\quad + e_ne'_1 + e_ne'_2 + \cdots + e_ne'_m \end{aligned} \quad \text{(nach 2 oder nach 50 der Grösenlehre)}$$

$$= 0 \qquad \text{(nach 4)}$$

Beispiel. Ein Käfer, welcher Säugethier sein soll, ist nichts, ebenso ein Thier, welches Pflanze sein soll, ebenso ein Säugethier, welches Fisch sein soll. Der Wall (Balaena L.) darf daher nicht Wallfisch genannt werden, da er ein Säugethier und kein Fisch ist, die Schildkröte darf nicht Kröte genannt werden u. s. w. Eine Menge Kunstausdrücke und Namen bedürfen aus diesem Grunde einer Umgestaltung, da sie einen begrifflichen Widerspruch enthalten. In dem Bande meines Gebäudes des Wissens, der die Naturbeschreibung behandelt, sind alle diese fehlerhaften Namen entfernt und dafür richtig gebildete Namen eingeführt.

8. **Die Summe zweier Begriffe ist die Summe sämmtlicher in den beiden Begriffen enthaltener verschiedener Stifte oder Elemente, oder**

Wenn c die Summe derjenigen Stifte des b bezeichnet, welche nicht in a enthalten, sondern dem b eigenthümlich sind, so ist $a + b = a + c$, und umgekehrt, wenn $a + b = a + c$, so sind alle Stifte, welche nicht in a enthalten, sondern einer der Grösen b oder c eigenthümlich sind, sämmtlich den beiden Grösen b und c gemeinsam.

Beispiele. „Die ungebildeten und die unsittlichen Menschen“ umfassen ganz dieselben Wesen als „die ungebildeten, die unsittlichen gebildeten Menschen“. „Die Besitzenden und die Adligen“ umfassen ganz dieselben Menschen als „die Besitzenden und die besitzlosen Adligen.

Beweis. Es enthalte der Begriff d alle Stifte, welche a und b gemeinsam sind, auser diesen aber keine, so setze ich

$$a = a_1 + d \qquad b = d + c,$$

wo a_1, d und c kein Stift gemeinsam haben, dann ist

$$\begin{aligned} a + b &= (a_1 + d) + (d + c) \\ &= a_1 + (d + d) + c && \text{(nach 2)} \\ &= a_1 + d + c && \text{(nach 5)} \\ &= a + c. \end{aligned}$$



9. **Das Zeug** oder **Product** zweier Begriffe ist die Summe sämmtlicher den beiden Begriffen gemeinsamer Stifte oder Elemente, oder

Wenn die Begriffe a und b das Stück c, sonst aber kein Stift gemein haben, so ist $ab = c$ und umgekehrt

Wenn $ab = c$, so haben die Begriffe a und b das Stück c, auser demselben aber kein Stift gemein.

Beispiele. Die Maler, welche Dichter sind; die Säugethiere, welche Flossen haben, d. h. die Flosser oder Walle. Hierhin gehören alle Bestimmungen durch Beiwörter; dieselben geben um so schärfere Bestimmungen, je geringer der gemeinsame Kreis beider Sphären ist, z. B. der jugendliche Greis oder der weise Jüngling. Will man Ungeziemendes oder Erstaunenswerthes bezeichnen, so wendet man gern Bezeichnungen an, welche sich ganz auszuschliesen scheinen, so für Menschen die Wörter Unmensch, Engel oder die Thiernamen: Rind, Geier, Taube.

Beweis: Es enthalte der Begriff c alle Stifte, welche a und b gemein haben, aber keine anderen Stifte; dann setze ich

$$a = a_1 + c \qquad b = b_1 + c$$

wo a_1, b_1 und c kein Stift gemein haben, so ist

$$
\begin{aligned}
a \cdot b &= (a_1 + c)(b_1 + c) \\
&= a_1 b_1 + a_1 c + c b_1 + cc && \text{(nach 2)} \\
&= cc && \text{(nach 7)} \\
&= c && \text{(nach 5)}
\end{aligned}
$$

10. $$a + ab = a.$$

Man kann zu jedem Begriffe ohne Aenderung seines Werthes ein Zeug fügen (Product addiren), in dem jener Begriff Merkmal ist, und

Die Summe eines Begriffes mit einem Zeuge (Producte), in dem der Begriff Merkmal ist, ist dem Begriffe gleich.

Beweis. Unmittelbar aus 9 und 5.

11. **Erklärung.** Die verschiedenen Stücke, welche ein Begriff enthält, bilden seinen **Umfang** (periochē, complexus, summa), die Merkmale, welche den Begriff bestimmen, bilden seinen **Inhalt** (pretium).

Der Umfang eines Begriffes heist **weiter** oder **gröser** (major) als der eines andern, wenn er mehr, **enger** oder **kleiner** (minor), wenn er weniger Stifte oder Elemente enthält als der andere. Der Inhalt eines Begriffes heist **reicher** (gravior) als der eines andern, wenn er durch mehr, **ärmer** (levior), wenn er durch weniger Merkmale bestimmt ist.

Der weitere Begriff ist ärmer als der engere; der reichere ist enger als der ärmere.

Beispiele. So ist das Thierreich ein weiterer Begriff als das Wirbelthier, das Wirbelthier ein weiterer Begriff als das Säugethier, das Säugethier ein weiterer Begriff als der Hufer, der Hufer ein weiterer Begriff als das Pferd, das Pferd ein weiterer Begriff als das Eselpferd, kurz Esel genannt. Dagegen ist der Esel ein reicherer Begriff als das Pferd; denn der Esel ist ein Pferd mit einem schwarzen Kreuze auf dem Rücken und einem Haarbüschel am Ende des Schwanzes. So ist das Pferd ein reicherer Begriff als der Hufer; denn das Pferd ist ein Hufer mit nur einem Hufe. So ist der Hufer ein reicherer Begriff als das Säugethier u. s. w.

12. Erklärung. Zwei Begriffe heisen

1. Deckbegriffe, identische Begriffe (n. identicae s. aequipollentes), wenn beide einander gleich sind. Das Zeichen ist $a = b$.
2. Einbegriffe, incidente Begriffe (n. incidentes s. subordinatae), wenn der eine ein Stück des andern ist. Das Zeichen ist $a < b$ (gelesen a unter b) oder $b > a$ (gelesen b über a). Die Summe b heist der höhere oder weitere Begriff (n. superior, latior), das Stück a heist der niedere oder engere Begriff (n. inferior, angustior).
3. Schneidbegriffe (n. secantes), wenn beide theils gemeinsame, theils verschiedene, eigenthümliche Stifte oder Elemente haben. Die gemeinsamen Stifte bilden den gemeinsamen Begriff (n. communis), die verschiedenen Stifte den jedem eigenthümlichen Begriff (n. propria). Die Summe aller den beiden Schneidbegriffen angehörigen Stifte den verbindenden Begriff.
4. Trennbegriffe, disjuncte Begriffe (n. disjunctae), wenn beide kein Stift gemeinsam haben. Die Trennbegriffe bilden einen ausschliesenden (conträren) Gegensatz, die Schneidbegriffe einen theilweisen (disparaten) Gegensatz.

Beispiel. So sind „der Mensch“ und „das mit Vernunft begabte Säugethier“, so „der Mond“ und „der Erdtrabant“ Deckbegriffe, identische Begriffe.

So sind „der Sumpfvogel“ und „der Storch“, so „die Gans“ und „die Hausgans“, „das Veilchen“ und „das Hundeveilchen“ Inbegriffe (incidente Begriffe), und zwar ist im ersten Beispiele der Sumpfvogel der höhere, der Storch der niedere.

So sind „Ackerbauer“ und „Kaukasier“ Schneidbegriffe (secante Begriffe), denn unter den Ackerbauern giebt es viele, die keine Kaukasier sind, z. B. die Chinesen, und unter den Kaukasiern viele, die keine Ackerbauer sind. Jeder der beiden Begriffe hat also ein eigenthümliches Stück, während die Mehrzahl der Kaukasier Ackerbauer sind, also auch beide ein gemeinsames Stück haben.

So sind endlich „Insect“ und „Wirbelthier“, „Thier“ und „Pflanze“ Trennbegriffe (disjuncte Begriffe).

Anm. Bei den Inbegriffen (incidenten Begriffen) pflegt man den höch-

sten Begriff auch wohl Gattung (génos, genus), den niedern auch wohl Art (eidos, species) zu nennen; aber beide Namen haben in der Welt- oder Naturwissenschaft bereits eine engere Bedeutung erhalten und müssen daher hier verworfen werden.

13. Die **Summe** zweier Deckbegriffe (identischer Begriffe) ist derfelbe Begriff, die zweier Inbegriffe (incidenter Begriffe) ist der höhere Begriff, die zweier Schneidbegriffe (fecanter Begriffe) ist der verbindende Begriff, die zweier Trennbegriffe (disjuncter Begriffe) ist die Summe aller den beiden Begriffen angehörigen Stifte.

Beweis. Unmittelbar aus 5 und 8.

Beispiel. So ist die Summe aus „Mensch und vernunftbegabtes Säugethier" gleich „der Mensch", fo die Summe aus „Sumpfvogel und Storch" gleich „der Sumpfvogel", fo die Summe aus „Ackerbauer und Kaukafier" gleich „Ackerbauer und die nicht ackerbauenden Kaukafier", fo die Summe aus „Thier und Pflanze" gleich „Thier und Pflanze oder gleich dem seligen Wefen".

14. Jedes Stück ist der Summe gleich oder untergeordnet.

15. $[a + b = b] = [a \leqq b]$

Man kann zu jedem Begriffe ohne Aenderung feines Werthes den Deckbegriff oder den untergeordneten Begriff zufügen (addiren), und

Ein Begriff, welcher zu einem andern zugefügt den Werth desfelben nicht ändert, ist diefem deckend oder untergeordnet.

Beweis. Unmittelbar aus 5 und 8.

Beispiele. Zum ersten Satze fiehe die Beispiele zu 13. Wenn „die Menschen und geistigen Wefen" gleich „die geistigen Wefen", fo find „Menschen" und „geistige Wefen" entweder deckend (identisch), oder „die Menschen" find eine Art von „geistigen Wefen". Wenn „die Sumpf- und Stelzvögel" gleich „die Stelzvögel", fo find „Sumpfvögel" und „Stelzvögel" entweder deckend (identisch), oder „die Sumpfvögel" find eine Art von „Stelzvögeln".

16. Wenn $a + b = b$ ist, fo ist
$ab = a$.

Wenn die Summe zweier Begriffe dem einen derfelben gleich ist, fo ist das Zeug oder Product beider Begriffe dem andern gleich.

Beweis. $ab = a(a + b)$ (nach Annahme)
$= aa + ab$ (nach 2)
$= a + ab$ (nach 5)
$= a$ (nach 10)

17. Das **Zeug** oder Product zweier Deckbegriffe (identischer Begriffe) ist derfelbe Begriff, das zweier Inbegriffe (incidenter Begriffe) ist der niedere Begriff, das zweier Schneidbegriffe (fecanter

Begriffe) ist das beiden Begriffen gemeinſame Stück, das zweier Trennbegriffe (disjuncter Begriffe) ist Null.

Beweis. Unmittelbar aus 5, 9 und 7.

Beispiele. Die Erde, welche der von Menschen bewohnte Planet ist ist die Erde. Der Schwimmvogel, welcher eine Gans ist, ist die Gans! Das Weib, welches ein Held ist, ist ein Heldenweib, der Tischler, welcher ein Meister ist, ist ein Tischlermeister. Das Thier, welches eine Pflanze ist, giebt es nicht. Das Saugethier, welches ein Käfer ist, giebt es nicht.

18. **Das Zeug oder Product ist jedem Merkmale gleich oder untergeordnet.**

19. $[a = a \cdot b] = [a \leqq b]$ oder

Man kann jeden Begriff ohne Aenderung ſeines Werthes durch einen deckenden oder ihm übergeordneten Begriff bestimmen und

Ein Begriff, welcher einen andern bestimmt, den Werth desſelben nicht ändert, ist dieſem deckend oder übergeordnet.

Beweis. Unmittelbar aus 5 und 9.

Beispiele. Da „der Mensch, welcher ein Geist ist" gleich „der Mensch" ist, ist entweder „der Mensch" deckend (identisch) mit „Geist", oder er ist eine Art der Geister. Da „der Maler, welcher ſich mit Farben beschäftigt" gleich „der Maler" ist, ſo ist „der Maler" und der mit Farben Beschäftigte" entweder deckend (identisch), oder „der Maler" ist eine Art von „den mit Farben Beschäftigten", neben der es noch andere giebt, z. B. „die Optiker". Man nennt in der gewöhnlichen Logik die eingeordneten und deckenden Begriffe, durch welche ein Begriff bestimmt werden kann, verwandte, passende oder zustimmende Begriffe (n. affines, convenientes, consentientes), die getrennten (disjuncten) und schneidenden (ſecanten) Begriffe, durch welche der Begriff nicht bestimmt werden kann, da das Product dadurch ein anderes wird, widerstreitende Begriffe (n. contrariae s. contrarie oppositae).

20. $(a + b = b) + (ab = b) = (a = b)$.

Ein Begriff, welcher zu einem andern Begriffe zugefügt und auch ihn bestimmend dieſen Begriff nicht ändert, ist mit dieſem Begriffe deckend (identisch).

Beweis. Da $b = a + b$, ſo ist (Annahme)

$a = ab$ (nach 16)

$= b$. (nach Annahme)

Beispiele. Der „Sumpfvogel und der Stelzenvogel" ist „der Sumpfvogel", und „der Sumpfvogel, welcher Stelzen hat" ist „der Sumpfvogel", alſo ist „Sumpfvogel" und „Stelzenvogel" gleich oder identisch.

21. **Wenn von zwei Begriffen der erste dem zweiten und zugleich der zweite dem ersten untergeordnet ist, ſo ſind beide Begriffe deckend oder identisch oder**

$$(a < b) + (b < a) = (a = b).$$

Beweis. Wenn $a < b$ ist, ſo ist $a + b = b$, wenn $b < a$ ist, ſo ist $a + b = a$ (nach 15), mithin ist $b = a + b = a$.

22. Aus einem Begriffe a erhält man den untergeordneten oder engern Begriff, wenn man ihn durch einen untergeordneten oder durch einen schneidenden Begriff b bestimmt oder multiplicirt, oder

$ab < b$, wenn $a < b$, oder wenn a und b kreuzende Begriffe ſind.

Beweis. Unmittelbar aus 17.

Beispiele. Aus „irdisches Weſen und Geist" erhält man den engern Begriff „Erdgeist", aus „Markführendes Weſen und Pflanze" erhält man den engern Begriff „Markpflanze".

In der Wissenschaft ist dies Verhältniss vielfach benutzt, um aus den einfachen Gattungsnamen durch Zuſammenſetzung mit einem Schneidbegriffe die Artnamen zu bilden, ſo bildet man aus Baumbewohner und Lerche Baumlerche, ſo aus Haubenvogel und Fink Haubenfink, ſo aus Dampfer und Schiff Dampfschiff u. ſ. w.

23. Man kann keinen Begriff durch ſeinen getrennten oder disjuncten bestimmen und

Wenn das Zeug oder Product zweier Begriffe Null ist, ſo ſind die Begriffe getrennt oder disjunct.

Beweis. Unmittelbar aus 17.

24. Erklärung. Die Summe ſämmtlicher Stifte oder Elemente heist das All oder die Totalität. Das Zeichen derſelben ist T.

25. Das All oder die Totalität ist der höchste Begriff, welchem alle Begriffe untergeordnet ſind, oder

Was a auch für ein Begriff ſein möge, ſo ist

$a + T = T \qquad aT = a.$

Beweis. Da das All ſämmtliche Stifte enthält, ſo enthält es, was a auch für ein Begriff ſein möge, ſämmtliche Stifte von a; mithin ist a ein Stück des Alls, mithin ist auch

$a < T$ (nach 14), mithin
$a + T = T$ (nach 15) und
$aT = a$ (nach 19)

26. Null ist der niedrigste Begriff, welcher allen Begriffen untergeordnet ist, oder

Was a auch für ein Begriff ſein möge, ſo ist

$a + 0 = a \qquad a \cdot 0 = 0.$

Beweis. Es ist $a + 0 = a$ (nach 2), mithin auch $a \geq 0$ (nach 15).

27. Erklärung. Wenn die Summe zweier Trennbegriffe (disjuncter Begriffe) das All ist, ſo heist der eine das Nicht oder die Negation (negatio, contradictio) des andern. Das Nicht oder die Negation eines Begriffes wird durch den Buchstaben des Begriffes mit einem wagerechten Striche über demſelben bezeichnet, z. B. das

Nicht von a wird durch $\bar{a}$ (gelesen Nicht a) bezeichnet. Das Nicht oder die Negation wird auch **negativer** Begriff, der nicht negirte ein **positiver** Begriff oder das **Selbst** genannt.

Jeder Begriff und sein Nicht bilden einen **strengen** (contradictorischen) **Gegensatz**.

Beispiele. Das Nicht oder die Negation von „Sein" ist „Nichtsein", die von „Mensch" ist „Nichtmensch", die von „Ich" ist „Nichtich".

28. $a + \bar{a} = T \qquad a \cdot \bar{a} = 0.$

Die Summe jedes Begriffes und seines Nichtes ist das All, das Zeug oder Product jedes Begriffes mit seinem Nichte ist Null.

Beispiele. Es ist seit Hegel Sitte oder vielmehr Unsitte geworden, von dem endlichen Unendlichen zu reden, gleich als ob ein solcher Unsinn einen Sinn hätte. Das Unendliche ist das Nicht oder die Negation des Endlichen. Soll es also das bezeichnen, in dem kein Ende, keine Bestimmung gesetzt ist, so ist es das Bestimmungslose oder Unbestimmte, über welches sich mithin auch keine Bestimmung setzen, mithin gar nicht denken und reden lässt. Soll dagegen das Unendliche nur die Verneinung des Endlichen in einer einzelnen Sphäre, z. B. in Raum, Zeit, Schnelligkeit, oder in der Masse der Bewegung bezeichnen, so hat es seine volle Berechtigung, gehört dann aber erst den §. 99 und 100 oder den Gebieten des Hauptbegriffes an.

29. $\bar{T} = 0 \qquad \bar{0} = T.$

Das Nicht des Alls ist Null, das Nicht der Null ist das All, oder

Die Negation der Totalität ist Null, die der Null ist die Totalität.

Beweis. Es ist $T + 0 = T$ (nach 2)

$T \cdot 0 = 0$ (nach 2)

mithin ist $T = \bar{0}$ und $0 = \bar{T}$ (nach 28).

30. Satz des ausgeschlossenen Mittels (principium exclusi medii): $a \leq u + \bar{u}$.

Jeder Begriff ist der Summe jedes andern Begriffes und seines Nichtes untergeordnet.

Der Satz wird gewöhnlich so ausgedrückt: a ist entweder u oder Nichtu. Diese Form des Satzes ist aber fehlerhaft, denn jeder dem u übergeordnete oder ihn schneidende Begriff ist weder unter u noch unter Nichtu enthalten.

Beweis. $a \leq T$ (nach 25)

$\leq u + \bar{u}$ (nach 28)

31. **Alle Nichte oder Negationen desselben Begriffes sind einander gleich, oder für jeden Begriff giebt es nur ein Nicht, nur eine Negation desselben.**

Beweis. Es seien $\bar{a}$ und $\bar{a}_1$ zwei Nichte oder Negationen des Begriffes a, so ist

$$\begin{aligned} \bar a &= \bar a T && \text{(nach 25)} \\ &= \bar a(a + \bar a_1) && \text{(nach 28)} \\ &= \bar a a + \bar a \bar a_1 && \text{(nach 2)} \\ &= \bar a \bar a_1 && \text{(nach 28, da } \bar a a = 0) \end{aligned}$$

und ebenſo $\bar a_1 = \bar a \bar a_1 = \bar a$.

32. Das Nicht des Nichtes oder die Negation der Negation eines Begriffes a ist wieder der erste Begriff, oder

$$\bar{\bar a} = a.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \bar{\bar a} &= \bar{\bar a} T && \text{(nach 25)} \\ &= \bar{\bar a}(a + \bar a) && \text{(nach 28)} \\ &= \bar{\bar a} a + \bar{\bar a} \bar a && \text{(nach 2)} \\ &= \bar{\bar a} a && \text{(nach 28)} \end{aligned}$$

und ebenſo $a = \bar{\bar a} a = \bar{\bar a}$.

Beiſpiele. Jedes Weſen, welches nicht unendlich iſt, iſt endlich, jedes Weſen, welches kein Nichtmenſch iſt, iſt ein Menſch, jedes, welches kein Nichtich iſt, iſt das Ich.

33. $(au = 0) = (u \leqq \bar a)$ und $= (a \leqq \bar u)$

Jeder Begriff iſt dem Nichte ſeines Trennbegriffes (der Negation ſeines disjuncten Begriffes) gleich oder untergeordnet, und

Wenn ein Begriff dem Nichte eines andern gleich oder untergeordnet iſt, ſo iſt er von demſelben getrennt oder disjunct.

Beweis a.

$$\begin{aligned} u &= uT && \text{(nach 25)} \\ &= u(a + \bar a) && \text{(nach 28)} \\ &= ua + u\bar a && \text{(nach 2)} \\ &= u\bar a && \text{(nach Annahme } ua = 0) \end{aligned}$$

alſo iſt $u \leqq \bar a$, und ebenſo läſst ſich beweiſen $a \leqq \bar u$.

Beweis b. Wenn $u \leqq \bar a$, ſo iſt $\bar a = \bar a + u$ (nach 15), alſo

$$\begin{aligned} 0 &= a\bar a && \text{(nach 28)} \\ &= a(\bar a + u) && \text{(nach 15)} \\ &= a\bar a + au && \text{(nach 2)} \\ &= au && \text{(nach 28)} \end{aligned}$$

Beiſpiele. So iſt die Pflanze ein Nichtthier, ſo iſt der Angeredete ein Nichtich, ſo das Werden ein Nichtſein

34. $[a \leqq u] = [a\bar u = 0]$

Wenn ein Begriff einem andern gleich oder untergeordnet iſt, ſo iſt er dem Nichte (der Negation) desſelben getrennt (disjunct) und umgekehrt.

Beweis. Unmittelbar aus 33.

Beiſpiele. So iſt das Pferd dem Hufer untergeordnet, alſo iſt Pferd und Nichthufer getrennt oder disjunct. So iſt das Daſein dem Sein untergeordnet, alſo iſt Daſein und Nichtſein getrennt oder disjunct. So iſt der

Mensch dem Geiste untergeordnet, also ist Mensch und Nichtgeist getrennt oder disjunct.

35. Die Nichte oder Negationen deckender (identischer) Begriffe sind deckend, die eingeordneter (incidenter) Begriffe sind eingeordnet, und zwar ist das Nicht des höheren Begriffes dem Nichte des niederen Begriffes untergeordnet.

$$[a = u] = [\bar{a} = \bar{u}]$$
$$[a < u] = [\bar{u} < \bar{a}]$$

Beweis a. Wenn $a = u$, so ist sowohl $\bar{a}$ als $\bar{u}$ eine Negation von a, mithin $\bar{a} = \bar{u}$ (nach 31).

Beweis b. Wenn $a < u$, so ist $a + u = u$ (nach 15), also

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{u}u & \text{(nach 28)} \\ &= \bar{u}(a + u) & \text{(nach 15)} \\ &= \bar{u}a + \bar{u}u & \text{(nach 2)} \\ &= \bar{u}a & \text{(nach 28)} \end{aligned}$$

also $\bar{u} \leqq \bar{a}$ (nach 33).

Beispiele. Pflanze und Gewächs ist deckend oder identisch, also ist auch Nichtpflanze und Nichtgewächs deckend oder identisch. Dagegen ist das Ich dem Menschen untergeordnet, also ist der Nichtmensch dem Nichtich untergeordnet. Der Mensch ist dem Geiste untergeordnet, also ist der Nichtgeist dem Nichtmenschen untergeordnet, und zwar enthält der Nichtmensch auser den Nichtgeistern noch alle überirdischen Geister.

So ist auch das volle Sein dem Sein untergeordnet, und ebendeshalb das Nichtsein dem Nicht des vollen Seins untergeordnet, das Nicht des vollen Seins umfasst auser dem Nichtsein auch das leere Sein. Dies hat Hegel in seiner Logik verkannt. Er erklärt das leere Sein einerseits richtig für eine Art des Seins, zweitens aber auch für einen dem Nichtsein untergeordneten Begriff oder für eine Art des Nichtseins. Dies aber ist ein Irrthum. Das leere Sein ist zwar dem Nicht des vollen Seins untergeordnet; dies ist aber nicht dem Nichtsein untergeordnet, sondern übergeordnet, und das leere Sein daher nicht dem Nichtsein untergeordnet, sondern vielmehr getrennt oder disjunct.

36. $$[a < u] + [\bar{a} < \bar{u}] = [a = u]$$

Wenn das Nicht oder die Negation des niederen Begriffes dem des höheren untergeordnet ist, so sind beide Begriffe deckend oder identisch.

Beispiel. Das Ross ist dem Pferde untergeordnet und das Nichtross dem Nichtpferde, also ist Ross und Pferd identisch.

Beweis. Da $\bar{a} < \bar{u}$, so ist auch $u < a$ (nach 35), also ist zugleich $(a < u) + (u < a) = (a = u)$ (nach 21).

37. $$a + u + \bar{a}\bar{u} = T$$

Bei je zwei Begriffen ist die Summe aus den beiden Begriffen und dem Zeuge ihrer Nichte dem Alle gleich, oder



Bei je zwei Begriffen ist die Summe aus den beiden Begriffen und dem Prodncte ihrer Negationen der Totalität gleich.

Beweis. $T = TT$ (nach 5)
$= (a + \bar{a})(u + \bar{u})$ (nach 28)
$= au + a\bar{u} + \bar{a}u + \bar{a}\bar{u}$ (nach 2)
$= au + au + a\bar{u} + \bar{a}u + \bar{a}\bar{u}$ (nach 5)
$= a(u + \bar{u}) + (a + \bar{a})u + \bar{a}\bar{u}$ (nach 2)
$= aT + Tu + \bar{a}\bar{u}$ (nach 28)
$= a + u + \bar{a}\bar{u}$ (nach 25)

38. $[au = 0] = [\bar{a} + \bar{u} = T]$

Die Summe der Nichte zweier getrennter Begriffe (der Negationen zweier disjuncter Begriffe) ist das All, und nmgekehrt, wenn die Summe zweier Begriffe das All ist, ſo ſind die Nichte der Begriffe getrennt.

Beweis a. Wenn $au = 0$ ist, ſo ist
$T = \bar{a} + \bar{u} + au$ (nach 37)
$= \bar{a} + \bar{u}$ (nach Annahme)

Beweis b. Wenn $\bar{a} + \bar{u} = T$ ist, ſo ist
$a = aT$ (nach 25)
$= a(\bar{a} + \bar{u})$ (nach Annahme)
$= a\bar{a} + a\bar{u}$ (nach 2)
$= a\bar{u}$ (nach 28)

d. h. $a \leqq \bar{u}$ (nach 19), alſo $a \cdot u = 0$ (nach 33).

Beispiel. So umfassen die Nichtpflanzen und das Nichtthier, ſo der Nichtgeist und das Nichtſein zuſammen das All.

39. $(a < u) + (a < \bar{u}) = (a = 0)$
$(a > u) + (a > \bar{u}) = (a = T)$

Ein Begriff, der einem zweiten Begriffe und zugleich dessen Nichte oder Negation nntergeordnet ist, ist Nnll, und

Ein Begriff, der einem zweiten Begriffe und zugleich dessen Nichte übergeordnet ist, ist das All.

Beweis a. Da $a < u$, ſo ist $a\bar{u} = 0$, und da $a < \bar{u}$, ſo ist $au = 0$ (nach 33), alſo $a = aT = a(u + \bar{u})$ (nach 25 und 28)
$= au + a\bar{u}$ (nach 2)
$= 0$

Beweis b. Da $a > u$, ſo ist $a + u = a$, und da $a > \bar{u}$, ſo ist $a + \bar{u} = a$ (nach 15), alſo
$a = a + a$ (nach 5)
$= a + u + a + \bar{u}$ (nach Annahme)
$= a + a + (u + \bar{u})$ (nach 2)

$$a = a + T \qquad \text{(nach 5 und nach 28)}$$
$$= T \qquad \text{(nach 25)}$$

Beispiele. Ein Ding, welches zugleich dem Sein und dem Nichtſein untergeordnet ist, giebt es nicht. Auch das Werden, welches der Uebergang ist aus dem Nichtſein in das Sein, kann, ſoweit es im Anfange ein Nichtſein ist, nicht auch im Anfange ein Sein ſein; denn wäre es im Anfange ein Sein, ſo wäre es nicht mehr ein Werden, ſondern ein Sein oder Bleiben. Der Anfang der Hegelschen Logik ist daher die reine Missachtung jedes logischen Geſetzes, wie denn überhaupt die Hegelsche Logik ihren Namen wie der lucus a non lucendo führt. Natürlich kann eine einzelne Art des Seins, z. B. das leere Sein, einer andern Art des Nichtſeins, z. B. dem Nichtſein des vollen Seins untergeordnet ſein, wie wir in No. 35 ſahen; denn die Negation eines engeren Begriffes ist eben weiter als die des weiteren Begriffes, ſo umfasst im vorliegenden Falle das Nichtſein des vollen Seins auser dem reinen Nichtſein auch noch das ganze nicht volle Sein, d. h. das leere Sein.

Das einzige, was dem Sein und Nichtſein übergeordnet ist, ist das All.

40. Für **deckende (identische)** und für **eingeordnete (incidente) Begriffe** a und u finden die folgenden acht Gleichungen Statt, und wenn eine dieſer Gleichungen Statt findet, ſind die Begriffe deckend oder eingeordnet.

1. $a \leqq u$ 3. $a + u = u$ 5. $au = a$ 7. $a\bar{u} = 0$
2. $\bar{u} \leqq \bar{a}$ 4. $\bar{a} + \bar{u} = \bar{a}$ 6. $\bar{a}\bar{u} = \bar{u}$ 8. $\bar{a} + u = T$

Beweis. 1 aus 12, 2 aus 35, 3 und 4 aus 15, 5 und 6 aus 19, 7 aus 34 und 8 aus 38.

41. Für **Trennbegriffe (disjuncte Begriffe)** a und u finden die folgenden acht Gleichungen Statt, und wenn eine dieſer Gleichungen Statt findet, ſo ſind die Begriffe getrennt.

1. $a \leqq \bar{u}$ 3. $a + \bar{u} = \bar{u}$ 5. $a\bar{u} = a$ 7. $au = 0$
2. $u \leqq \bar{a}$ 4. $\bar{a} + u = \bar{a}$ 6. $\bar{a}u = u$ 8. $\bar{a} + \bar{u} = T$

Beweis. Unmittelbar aus 40, indem u in $\bar{u}$ und $\bar{u}$ in u umgewandelt, da, wenn a und u disjunct, a dem $\bar{u}$ untergeordnet ist.

42. Wenn man mit $(a + u)^{-}$ das Nicht oder die Negation von $a + u$ und mit $(au)^{-}$ das Nicht oder die Negation von au bezeichnet, ſo ist allgemein $(a + u)^{-} = \bar{a}\bar{u}$
und $(au)^{-} = \bar{a} + \bar{u}$

Beweis a. Es ist $(a + u) + (a + u)^{-} = T$ (nach 28)
und $(a + u) + \bar{a}\bar{u} = T$ (nach 37)

Ebenſo ist $(a + u)\cdot(a + u)^{-} = 0$ (nach 28)
und $(a + u)\bar{a}\bar{u} = a\bar{a}\bar{u} + u\bar{a}\bar{u}$
$= 0$ (nach 28)

Beweis b. Es ist $au + (au)^{-} = T$
und $au + (\bar{a} + \bar{u}) = T$

Ferner ist $(au)\,(au)^{-} = 0$
und $au(\bar{a} + \bar{u}) = au\bar{a} + au\bar{u}$
$= 0$

43. Erklärung. Wenn ein Begriff a die Summe zweier getrennter oder disjuncter Begriffe u und e ist, ſo heiſt der erste der **Hauptbegriff** und ein jeder der beiden Begriffe die **Ergänzung** des andern zum Hauptbegriffe.

Die Ergänzung von u zu a wird mit $\bar{u}_a$ bezeichnet (geleſen das Nicht u zu a).

Beispiele. Die Wirbelthiere und die wirbelloſen Thiere bilden zuſammen den Hauptbegriff Thier, beide ſind getrennt oder disjunct, beide ergänzen ſich zu dem Begriffe Thier, der eine Begriff ist alſo die Ergänzung des andern zum Hauptbegriffe. Aber es ist wohl zu unterscheiden das Nichtwirbelthier und das Thier, welches nicht Wirbelthier ist; denn das erste ist das Nicht oder die Negation und bezeichnet Alles, was nicht Wirbelthier ist, alſo ſowohl jedes Nichtthier als auch jedes wirbelloſe Thier, dagegen ist das zweite die Ergänzung zum Thiere und bezeichnet nur jedes Thier, welches wirbellos ist.

So bilden Säugethier und Nichtſäuger oder nichtſäugendes Wirbelthier zuſammen den Hauptbegriff Wirbelthier, ſo Handthier und Handloſes zuſammen den Hauptbegriff Säugethier.

Das ganze All zerfällt durch dieſe Ergänzungen in eine Reihe untergeordneter Hauptbegriffe. Jeder niedere Hauptbegriff ist enger in der Zahl der Stifte oder Elemente, aber reicher in der Zahl der Bestimmungen. Das All enthält die ſämmtlichen einfachen Stifte ohne jede Bestimmung. Die erste Bestimmung, welche beim Alle eintritt, bildet den ersten untergeordneten Hauptbegriff; dieſer enthält die Begriffe mit einer Bestimmung. Die zweite beim Alle eintretende Bestimmung bildet den zweiten untergeordneten Hauptbegriff; dieſer enthält die Begriffe mit zwei Bestimmungen u. ſ. w.

So zerfällt das All in die Hauptbegriffe: Ding und Thätigkeit, oder in Concretes und Abstractes, ſo der Hauptbegriff das Ding in die Welten der Geister und Körper, die Körperwelt in die Zustände der Zellloſen (Unorganischen) und der Zellweſen (Organischen), der Zustand der Zellweſen (Organischen) in die Reiche der Pflanzen und Thiere, das Thierreich in die Stufen der Wirbelloſen und Wirbelthiere, die Stufe der Wirbelthiere in die Klassen der Nichtſäuger und Säugethiere, die Klasse der Säugethiere in die Ordnungen der Handloſen und Handthiere. Jede Ordnung endlich in Sippen (Familien), Gattungen und Arten.

Bei den Bestimmungen unterscheidet man die, welche einer Gattung von Dingen zukommen, die Gattungsmerkmale (differentia generica), von denen, welche nur einer Art zukommen, den Artmerkmalen (differentia specifica); auſserdem unterscheidet man weſentliche Bestimmungen (d. essentialis, constitutiva), abgeleitete Bestimmungen (d. consecutiva, attributiva).

44. Für die untergeordneten Begriffe des Hauptbegriffes gelten ganz dieselben Gesetze, wie für die des Alls oder der Totalität, wenn man statt des Alls den Hauptbegriff, statt des Nichtes oder der Negation die Ergänzung zum Hauptbegriffe setzt, namentlich gelten in dieser Weise für den Hauptbegriff alle Gesetze in No. 24 bis 42.

Beweis. Unmittelbar durch Umgestaltung der Beweise in No. 24 bis 42.

Es wird nicht schwer sein, für die verschiedenen Hauptbegriffe des Alls Beispiele nach dem Vorbilde der für das All gegebenen aufzustellen und zu zergliedern Jeder wird hier in dem ihm eigenthümlichen Wirkungs- und Begriffs-Gebiete einen reichen Stoff finden und diese Arbeit nicht ohne lohnende Frucht für seinen Geist und sein Wissen vollbringen.

45. Die Begriffe, welche wir in der Logik kennen gelernt haben, sind reine Formbegriffe, welche in streng wissenschaftlicher Form das darstellen, was die Erscheinungen bieten und was Gegenstand des Denkens wird. Das Wesen der Dinge wird durch diese Formbegriffe nicht erfasst. Wollen wir das Wesen der Dinge begreifen, so müssen wir Wesensbegriffe bilden, aber diese Wesensbegriffe sind nicht mehr Gegenstand der Logik, sondern der Wesenslehre, welche einen Theil der Wissenslehre bildet und dort ihre Behandlung finden wird.

Abschnitt 2. Die Urtheilsbildung.

46. Erklärung. Eine Gleichung von der Form $a = xu$ heist ein **Urtheil** (krísis, judicium). a heist das **Ding** oder **Subject** (hypóstasis, subjectum), xu die **That** oder das **Prädicat** (katēgórēma, praedicatum) des Urtheils. x heist der **unbestimmte Deut** oder **Artikel**. Das Urtheil wird gelesen a ist ein u.

Die sprachliche Form des Urtheils heist ein **Satz** (lógos, propositio). Aber nicht jeder Satz ist ein Urtheil, es giebt **unbestimmte** Sätze (pr. indesignata, indeterminata, indefinita), welche gar keine bestimmte Aussage enthalten und daher der Begriffslehre ganz fremd sind.

Die sprachliche Form des Satzes (lógos) kann eine zwiefache sein:

1. der **beilegende** oder **kategorische Satz** (lógos katēgorikós) hat die Form eines einfachen Satzes mit Ding (Subject) und That (Prädicat), z. B. der Mensch ist ein Geist;
2. der **annehmende** oder **hypothetische Satz** (lógos hypothetikós) hat die Form eines zusammengesetzten Satzes, wo der Vordersatz (antecedens) die **Annahme** oder **Voraussetzung** (hypóthesis, conditio), der Nachsatz (consequens) die **Folgerung** (thésis, conditionatum) enthält, z. B. wenn er Mensch ist, so ist er auch ein Geist. Der Vordersatz ist dann das Ding oder Subject, der Nachsatz die That oder das Prädicat des Urtheils.

Dieser Unterschied in der Form hat aber auf die Begriffslehre keinen Einfluss, der Unterschied ist nur ein sprachlicher, kein begrifflicher. Jeder Satz der Begriffslehre gilt für die eine Form ebensowohl wie für die andere, da die begriffliche Verknüpfung dieselbe ist.

Beispiele des beilegenden oder kategorischen Urtheils. Gott ist ein Geist, der Mensch ist ein Geschöpf, der Gedanke ist eine Geistesthat, das Urtheil ist eine Begriffsverknüpfung.

Beispiele des annehmenden oder hypothetischen Urtheils. Wenn du ein vernünftiges Wesen bist, bist du ein Kind Gottes. Wenn du sündigst, bist du ein gefallener Geist. Wenn du andere beraubst, bist du ein Verbrecher. Die annehmenden oder hypothetischen Urtheile lauten in beilegende oder kategorische umgewandelt: Das vernünftige Wesen ist ein Kind Gottes, der Sünder ist ein gefallener Geist, der Räuber ist ein Verbrecher.

47. Der unbestimmte Deut oder Artikel x kann jeden beliebigen Begriff bezeichnen, welcher mit u das Stück a, aber auch nicht

mehr als das Stück a, gemeinfam hat, oder in dem Urtheile $a = xu$ ist $x = a + y$, wo $yu = 0$.

Beweis. Unmittelbar aus 9.

Beispiele. In dem Urtheile der Mensch ist ein Geist kann der unbestimmte Deut „ein" jeden beliebigen Begriff bezeichnen, der unter den Geistern nur den Menschen umfast, fo kann er das irdische Wefen, fo das fichtbare Wefen, fo das Adams-Geschlecht bezeichnen, z. B. der Mensch ist der irdische Geist, oder der fichtbare Geist, oder das Adams-Geschlecht unter den Geistern.

48. $[a = xu] = [a \leqq u]$

In jedem Urtheile ist das Ding (Subject) der That (dem Prädicate) gleich oder untergeordnet und

Wenn von 2 Begriffen der erste dem zweiten gleich oder untergeordnet ist, fo kann man beide zu einem Urtheile verbinden, in welchem der erste Begriff Ding (Subject), der zweite That (Prädicat) find.

Beweis a. Wenn gegeben ist $a = xu$, fo ist $x = a + y$ und $yu = 0$ (nach 47), alfo

$$\begin{aligned} a = xu &= (a + y)u && \text{(nach 47)} \\ &= au + yu && \text{(nach 2)} \\ &= au && \text{(nach 47)} \end{aligned}$$

mithin $a \leqq u$ (nach 19).

Beweis b. Wenn gegeben ist $a \leqq u$, fo ist

$$\begin{aligned} a &= au \\ &= au + yu && \text{wo } yu = 0 \text{ (nach 2)} \\ &= (a + y)u && \text{(nach 2) und wenn } x = a + y \\ &= xu, \text{ wo } x = a + y \text{ und } yu = 0, && \text{wie nach 47 bei} \end{aligned}$$

jedem Urtheile.

49. Statt des doppelten Zeichens $\geqq$ wird das einfache Zeichen $\angle$ eingeführt, und wird statt $a \leqq u$ kürzer $a \angle u$ (gelefen a in u) geschrieben. Es bezeichnet alfo a in n, dass a dem u entweder gleich oder untergeordnet ist. Dann ist die Form des Urtheils $a = xu$ nach No. 48 gleichbedeutend mit der Form $a \angle u$, diefe kürzere Form führe ich im Folgenden für die Urtheile ein. Es ist alfo $(a \angle u) = (a = xu)$.

50. Erklärung. Eintheilung der Urtheile.

Man theilt die Urtheile ein entweder nach dem Umfange des Dinges (quantitas subjecti) oder nach dem Zeichen des Dinges (qualitas subjecti) oder nach dem Zeichen der That (qualitas praedicati).

1. Nach dem Umfange des Dinges (quantitas subjecti) sind die Urtheile entweder

Urtheile vom vollen Dinge, allgemeine Urtheile (krísis kathólou, judicium universalis sc. subjecti), welche von dem ganzen Dinge oder Subjecte etwas aussagen: Form a ∠ u, oder

Urtheile vom Theile des Dinges, besondere Urtheile (kr. en mérei, j. particularis), welche von einem Stücke des Dinges oder Subjectes etwas aussagen: Form xa ∠ u.

2. Nach den Zeichen des Dinges (qualitas subjecti) sind die Urtheile entweder

Urtheile vom Dinge selbst (kr. tinós, j. positi sc. subjecti), welche von Dingen selbst etwas aussagen: Form a ∠ u, oder

Urtheile vom Nichtdinge (kr. oudenós, j. negati), welche vom Nichtdinge etwas aussagen: Form ā ∠ u.

Nach dem Dinge oder Subjecte überhaupt giebt es also vier Arten der Urtheile:

Vollurtheile (kathólou tinós), welche vom ganzen Dinge selbst aussagen: Form a ∠ u.

Nichturtheile (kathólou oudenós), welche vom ganzen Nichtdinge aussagen: Form ā ∠ u.

Theilurtheile (en mérei tinós), welche vom Stücke des Dinges selbst aussagen: Form xa ∠ u.

Trennurtheile (en mérei oudenós), welche vom Stücke des Nichtdinges aussagen: Form xā ∠ u.

3. Nach dem Zeichen der That (qualitas praedicati) sind die Urtheile entweder

Behauptungen, bejahende Urtheile (katáphasis, affirmatio), welche die That selbst beilegen: Form a ∠ u, oder

Leugnungen, verneinende Urtheile (apóphasis, stérēsis, abjudicatio, privatio), welche das Nicht der That beilegen, oder die That selbst leugnen: Form a ∠ ū.

51. Es giebt demnach acht Arten von Urtheilen, vier allgemeine und vier besondere:

allgemeine:

1. Vollbehauptung oder Behauptung vom ganzen Dinge selbst (katáphasis kathólou tinós). Form: a ∠ u.
2. Vollleugnung oder Leugnung vom ganzen Dinge selbst (stérēsis kathólou tinós). Form: a ∠ ū.

3. **Nichtbehauptung** oder Behauptung vom ganzen Nichtdinge (katáphasis kathólou oudenós). Form: $\bar{a} \angle u$.
4. **Nichtleugnung** oder Leugnung vom ganzen Nichtdinge (stérēsis kathólou oudenós). Form: $\bar{a} \angle \bar{u}$.

Befondere:

1. **Theilbehauptung** oder Behauptung vom Stücke des Dinges felbst (katáphasis en mérei tinós). Form: $xa \angle u$.
2. **Theilleugnung** oder Leugnung vom Stücke des Dinges felbst (stérēsis en mérei tinós). Form: $xa \angle \bar{u}$.
3. **Trennbehauptung** oder Behauptung vom Stücke des Nichtdinges (katáphasis en mérei oudenós). Form: $x\bar{a} \angle u$.
4. **Trennleugnung** oder Leugnung vom Stücke des Nichtdinges (stérēsis en mérei oudenós). Form: $x\bar{a} \angle \bar{u}$.

Beispiele. Volle:

1. Jeder Mensch ist ein vernünftiges Wefen.
2. Jedes Thier ist ein unvernünftiges Wefen.
3. Jedes unvernünftige Wefen ist ein körperliches Ding.
4. Jedes unorganische Wefen ist ein Nichtthier.

Theilweife:

1. Einige Menschen find begabte Wefen.
2. Einige Thiere find wirbellofe Wefen.
3. Einige unvernünftige Wefen find Thiere.
4. Einige unorganische Wefen find Nichtsteine.

An diefer Stelle wird es fehr zweckmässig fein, eine Reihe von Beispielen für jede diefer acht Arten von Urtheilen zu bilden.

In der Eintheilung der Urtheile musste die gewöhnliche Logik ganz verlassen werden, da diefelbe in diefem Punkte fehlerhaft ist. Es musste ebenfo die Eintheilung in allgemeine, befondere und einzelne Urtheile, die in pofitive, negative und unendliche Urtheile, die in kategorische, hypothetische und disjunctive, als die in problematische, assertorische und apodictische aufgegeben werden.

Es find nämlich in der gewöhnlichen Logik nicht nur sprachliche und begriffliche Verhältnisse gemengt, fondern auch Verhältnisse der Aussenwelt und des Begriffes. So ist der Unterschied des kategorischen und hypothetischen Urtheils, wie wir in No. 46 fahen, ein rein sprachlicher, fo ist der Unterschied des problematischen, assertorischen und apodictischen oder der Möglichkeit, Wirklichkeit und Nothwendigkeit rein der Aussenwelt angehörig.

Es find aber auch die Eintheilungen der gewöhnlichen Logik überhaupt unlogisch und fehlerhaft. Denn das einzelne Urtheil, z. B. der Mensch ist ein Geist, ist ein allgemeines und nicht ein theilweifes; es bilden alfo nur das allgemeine und das theilweife Urtheil einen Gegenfatz. Und wieder kann das fogenannte unendliche Urtheil ebenfowohl ein pofitives wie ein negatives fein, z. B. der Stein ist ein unorganisches Wefen, und der Stein ist nicht ein unorganisches Wefen.

Endlich ist aber auch die Unterscheidung des pofitiven und negativen

Urtheils eine unlogische. Man nennt in der gewöhnlichen Logik nämlich das Urtheil ein negatives, wenn die Verneinung der Copula beigefügt ist, z. B. der Mensch ist nicht Sclave seiner Leidenschaften. Aber einmal kann diese Verneinung zwiefachen Sinn haben, indem entweder das Sein verneint oder aber das Nichtsein behauptet wird. Im ersten Falle hat die Verneinung den Sinn, ich verneine, dass er ein Sclave ist, im andern Falle hat sie den Sinn, ich behaupte, dass er das Nichtsein des Sclaven hat. Die Sprache drückt Urtheile der ersten Art aus durch die Form: „a ist nicht ein u" oder „a ist kein u", d. h. a ist nicht $\angle$ u, oder es ist u $\gtrless$ a. So z. B. sagt der Satz: „Das Parallelogramm ist kein Rechteck" nur aus, dass das Parallelogramm dem Rechtecke nicht gleich oder untergeordnet ist. Dagegen drückt die Sprache die Urtheile der zweiten Art durch die Form aus: „Kein a ist ein u", d. h. „Es giebt nicht a, welches ein u ist", oder es giebt nicht ein Stift (Element), das den Begriffen a und u gemein ist, die Begriffe sind getrennt oder disjunct, d. h. au = 0. Die beiden Formen unterscheiden sich also in der Weise, dass die erste: „a ist kein u" nur die Gleichheit und Unterordnung des a in u ausschliest, nicht aber die Schneidung, nicht auch die Unterordnung des u in a, dass dagegen die zweite Form: „Kein a ist u" jede Schneidung und jede Unterordnung ausschliesst und reine Trennung oder Disjunction fordert. Der letzte Satz ist genau gleich der begrifflichen Form a $\angle$ $\bar{u}$ (a ist ein Nichtu) oder gleich der vollsetzenden Leugnung (Leugnung vom ganzen Dinge selbst) nach unserer Erklärung, der erste ist gleich der begrifflichen Form xa $\angle$ u (Einige a sind Nichtu) oder gleich der theilsetzenden Leugnung (Leugnung vom Stücke des Dinges selbst) (vergl. 55).

Sehen wir von diesen Fehlern der gewöhnlichen Logik ab, und setzen wir die positiven und negativen Urtheile unserer Behauptung und Leugnung gleich, so unterscheidet die gewöhnliche Logik 4 Arten von Urtheilen, indem sie alle Urtheile vom Nichtdinge oder von der Negation des Subjectes ausschliest. Da diese aber ebensogut Umwandlungen und Schlüsse zulassen, wie jedes andere Urtheil, da die Entwicklung, wenn man sie weglassen wollte, wesentliche Mängel zeigen würde, so mussten sie wieder eingeführt werden. Jene 4 Urtheile vom Dinge selbst oder vom positiven Subjecte bezeichnet nun die gewöhnliche Logik durch die 4 Vocale (Klänge) a, e, i und o nach der Regel:

> asserit a, negat e, sed universaliter ambo,
> asserit i, negat o, sed particulariter ambo.

52. **Erklärung.** Ein Urtheil **umkehren** (antistréphein, convertere) heist, die Begriffe des Dinges und der That oder des Subjectes und des Prädicates mit einander vertauschen. Das gegebene Urtheil heist das **umkehrende** (convertens), das abgeleitete heist das **umgekehrte** (conversum).

Ein Urtheil **abschwächen** (subalternare) heist, aus dem Urtheile über die Summe ein Urtheil über ein Stück ableiten.

Beispiel der Umkehr: Der Mond ist der Erdtrabant, der Erdtrabant ist der Mond.

Beispiel der Abschwächung: Alle Menschen sind vernünftige Wesen. Einige Menschen sind vernünftige Wesen.



53. Jedes allgemeine Urtheil kann man nmkehren durch Umkehr des Zeichens der Qualität der beiden Begriffe, jedes theilweise oder particulare durch Umkehr des Umfangs oder der Quantität beider Begriffe und ebenso rückwärts, d. h. es ist

1. $(a \angle u) = (\bar{u} \angle \bar{a})$
2. $(\bar{a} \angle \bar{u}) = (u \angle a)$
3. $(a \angle \bar{u}) = (u \angle \bar{a})$
4. $(\bar{a} \angle u) = (\bar{u} \angle a)$
5. $(xa \angle u) = (xu \angle a)$
6. $(x\bar{a} \angle \bar{u}) = (x\bar{u} \angle \bar{a})$
7. $(xa \angle \bar{u}) = (x\bar{u} \angle a)$
8. $(x\bar{a} \angle u) = (xu \angle \bar{a})$

Beweis. Zu 1 und 2 unmittelbar nach 40.
Zu 3 und 4 unmittelbar nach 41.
Zu 5: $(xa \angle u) = (xa = yu)$ (nach 48)
$= (yu = xa)$ (nach 11 der Grösenlehre)
$= (yu \angle a)$ (nach 48)
Ebenso zu 6 bis 8.

Beispiele.

	Umkehrendes (convertens).	Umgekehrtes (conversum).
1.	Der Wall ist ein Säugethier.	Der Nichtsäuger ist ein Nichtwall.
2.	Der Nichtsäuger ist ein Nichtwall.	Der Wall ist ein Säugethier.
3.	Der Käfer ist ein wirbelloses.	Das Wirbelthier ist ein Nichtkäfer.
4.	Die Nichtwelt ist das Göttliche.	Das Nichtgöttliche ist die Welt.
5.	Einige Menschen sind geistvoll.	Einige geistvolle Wesen sind Menschen.
6.	Einige Unvernünftige sind gottlos.	Einige Gottlose sind unvernünftig.
7.	Einige Flosser sind Nichtfische.	Einige Nichtfische sind Flosser.
8.	Einige Nichtvögel sind geflügelt.	Einige Geflügelte sind Nichtvögel.

54. Jedes allgemeine Urtheil kann man in das entsprechende theilweise oder particulare Urtheil abschwächen, dagegen kann man nicht vom theilweisen oder particularen Urtheile zum entsprechenden allgemeinen Urtheile aufsteigen, oder es ist

1. Wenn $a \angle u$ oder wenn $\bar{a} \angle \bar{u}$ auch $xa \angle u$, $x\bar{a} \angle \bar{u}$, $xu \angle a$ und $x\bar{u} \angle \bar{a}$.
2. Wenn $a \angle \bar{u}$ auch $xa \angle \bar{u}$ und $xu \angle \bar{a}$.
3. Wenn $\bar{a} \angle u$ auch $x\bar{a} \angle u$ und $x\bar{u} \angle a$.

Beweis ad 1. Wenn $a \angle u$, so ist $a = au$ (nach 19), also auch $xa = xau$, d. h. $xa \angle u$ und durch Umkehr desselben $xu \angle a$. Ferner ist, wenn $a \angle u$, durch Umkehr des allgemeinen Urtheils auch $\bar{u} \angle \bar{a}$, mithin auch $x\bar{u} \angle \bar{a}$, und durch Umkehr desselben $x\bar{a} \angle \bar{u}$.

Ebenso folgen 2 und 3.

55. Für jedes der acht Arten von Urtheilen finden acht Formeln Statt, und umgekehrt, gilt eine der acht Formeln, so findet das entsprechende Urtheil Statt. Die einander entsprechenden Formeln sind:

	Urtheile.		Summengleichungen.		
1.	$a \angle u$	$\bar{u} \angle \bar{a}$	$\bar{a} + \bar{u} = \bar{a}$	$a + u = u$	$\bar{a} + u = T$
2.	$\bar{a} \angle \bar{u}$	$u \angle a$	$a + u = a$	$\bar{a} + \bar{u} = \bar{u}$	$a + \bar{u} = T$
3.	$a \angle \bar{u}$	$u \angle \bar{a}$	$\bar{a} + u = \bar{a}$	$a + \bar{u} = \bar{u}$	$\bar{a} + \bar{u} = T$
4.	$\bar{a} \angle u$	$\bar{u} \angle a$	$a + \bar{u} = a$	$\bar{a} + u = u$	$a + u = T$
5.	$xa \angle u$	$xu \angle a$	$\bar{a} + n \gtrless \bar{a}$	$a + \bar{u} \gtrless \bar{u}$	$\bar{a} + \bar{u} \gtrless T$
6.	$x\bar{a} \angle \bar{u}$	$x\bar{u} \angle \bar{a}$	$a + \bar{u} \gtrless a$	$\bar{a} + u \gtrless u$	$a + u \gtrless T$
7.	$xa \angle \bar{u}$	$xu \angle \bar{a}$	$\bar{a} + \bar{u} \gtrless \bar{a}$	$a + u \gtrless u$	$\bar{a} + u \gtrless T$
8.	$x\bar{a} \angle u$	$x\bar{u} \angle a$	$a + u \gtrless a$	$\bar{a} + \bar{u} \gtrless \bar{u}$	$a + \bar{u} \gtrless T$

Zeuggleichungen (Productgleichungen).

1	$au = a$	$\bar{a}\bar{u} = \bar{u}$	$a\bar{u} = 0$
2.	$\bar{a}\bar{u} = \bar{a}$	$au = u$	$\bar{a}u = 0$
3.	$a\bar{u} = a$	$\bar{a}u = u$	$au = 0$
4.	$\bar{a}u = \bar{a}$	$a\bar{u} = \bar{u}$	$\bar{a}\bar{u} = 0$
5.	$a\bar{u} \gtrless a$	$\bar{a}u \gtrless u$	$au \gtrless 0$
6.	$\bar{a}u \gtrless \bar{a}$	$a\bar{u} \gtrless \bar{u}$	$\bar{a}\bar{u} \gtrless 0$
7.	$au \gtrless a$	$\bar{a}\bar{u} \gtrless \bar{u}$	$a\bar{u} \gtrless 0$
8	$\bar{a}\bar{u} \gtrless \bar{a}$	$au \gtrless u$	$\bar{a}u \gtrless 0$

Beweis. Reihe 1 und 2 unmittelbar aus No. 40.
Reihe 3 und 4 unmittelbar aus No. 41.

Reihe 5. Wenn $xa \angle u$, so haben a und u das Stück xa gemeinsam, also sind a und u nicht disjunct, also ist $au \gtrless 0$, und gelten also alle Formeln der Reihe 5.

Reihe 6 bis 8. Ebenso folgen die Formeln der Reihe 6 bis 8.

Anwendung der Urtheile auf die Begriffe.

Wir behandeln zunächst die vollen Urtheile und demnächst die theilweisen Urtheile. Bei der Verbindung von deckenden oder untergeordneten Begriffen finden die Form 1 und 2, bei der von getrennten Begriffen die Form 3, bei der von schneidenden Begriffen die Formen 5, 7 und 8 statt, endlich bei der von abschneidenden Begriffen die Form 4, bei der von kreuzenden Begriffen die Form 6.

56. Je zwei deckende oder eingeordnete (incidente) Begriffe lassen sich zu einer vollsetzenden Behauptung (Behauptung vom ganzen Dinge selbst) oder zu einer vollnichtenden Leugnung

(Leugnung vom ganzen Nichtdinge) verbinden, und zwar bildet der untergeordnete Begriff in der vollfetzenden Behauptung das Ding oder Subject, in der vollnichlenden Leugnung die That oder das Prädicat; oder

In jeder vollfetzenden Behauptung ist der Begriff des Dinges oder Subjectes dem der That oder des Prädicats gleich oder untergeordnet; in jeder vollnichtenden Leugnung ist der Begriff der That oder des Prädicats dem des Dinges oder Subjectes gleich oder untergeordnet.

Beweis. Unmittelbar aus 40.

Beispiele. Das Ross ist dem Pferde gleich, alfo folgt:
Jedes Pferd ist ein Ross und
Jedes Nichtpferd ist ein Nichtross.
Der Pommer ist dem Deutschen untergeordnet, alfo folgt:
Jeder Pommer ist ein Deutscher und
Jeder Nichtdeutscher ist ein Nichtpommer.
Und gilt eines diefer Urtheile, fo folgt daraus rückwärts das Verhältniss der Unterordnung.

57. Je zwei getrennte oder disjuncte Begriffe lassen fich zu einer vollfetzenden Leugnung (Leugnung vom ganzen Dinge felbst) verbinden, in welchem jeder der beiden Begriffe felbst das Ding oder Subject fein kann und

In jeder vollfetzenden Leugnung find die Begriffe des Dinges und der That (oder des Subjects und des Prädicats) von einander getrennt oder disjunct.

Beweis. Unmittelbar aus 41.

Beispiele. Die Urtheile: Die Aale find Nicht-Schlangen, die Walle find Nicht-Fische, der Puter ist ein Nicht-Hahn, die Schildkröte ist eine Nicht-Kröte fagen nichts anderes aus, als dass die Begriffe felbst: Aal und Schlange, Wall und Fisch etc. getrennt oder disjunct find. Die sprachliche Form ist, wie wir zu No. 51 fahen, eine andere, nämlich die: Kein Aal ist eine Schlange, kein Wall ist ein Fisch u. f. w.

58. Je zwei schneidende Begriffe lassen fich zu einer theilfetzenden Behauptung, einer theilfetzenden Leugnung und einer theilnichtenden Leugnung verbinden, in welchen jeder der beiden Begriffe felbst das Ding oder Subject bilden kann.

Dagegen folgt nicht, dass in jeder theilfetzenden Behauptung, theilfetzenden Leugnung und theilnichtenden Behauptung die Begriffe des Dinges und der That (des Subjects und des Prädicats) schneidend find; vielmehr müssen hierfür noch befondere Bedingungen Stattfinden.

Beweis. Die beiden schneidenden Begriffe a und u lassen fich als zwei Summen fetzen $a = a_1 + c$, $u = u_1 + c$, wo a_1, c und

u_1 gegenſeitig getrennt (disjunct) und alle ungleich Null. Das All oder die Totalität ist dann $T = a_1 + c + u_1 + d$, wo d keine Stifte oder Elemente von a_1, c und u_1 enthält, aber entweder Null oder ungleich Null ſein kann.

Ist $d = 0$, ſo ist $T = a_1 + c + u_1 = a + u_1$, wo a und u_1 getrennt (disjunct), alſo $\bar{a} = T\bar{a} = (a + u_1)\bar{a} = u_1\bar{a}$ und ebenſo $u_1 = u_1\bar{u}$, mithin $\bar{a} = u_1$, alſo $\bar{a} \angle u$ und durch Umkehr (nach No. 52) auch $\bar{u} \angle a$. Mithin kann nicht $x\bar{a} \angle \bar{u}$ und nicht $x\bar{u} \angle \bar{a}$ ſein.

Ist dagegen $d \gtrless 0$, ſo ist $T = a_1 + c + u_1 + d$, mithin ist $\bar{a} = u_1 + d$ und auch $\bar{u} = a_1 + d$, mithin haben $\bar{a}$ und $\bar{u}$ das Stück d gemeinſam und es gilt die Formel $x\bar{a} \angle \bar{u}$ und $x\bar{u} \angle \bar{a}$, dagegen kann in dieſem Falle nicht $\bar{a} \angle u$ und nicht $\bar{u} \angle a$ ſein.

Beispiele. Es schneiden ſich die Begriffe: Thier und vierbeiniges Weſen, alſo folgt:

Einige Thiere ſind vierbeinige Weſen,
Einige Thiere ſind nichtvierbeinige Weſen,
Einige Nichtthiere ſind vierbeinige Weſen (z. B. Tische u Stühle);

ferner folgt:

Einige vierbeinige Weſen ſind Thiere,
Einige vierbeinige Weſen ſind Nichtthiere,
Einige nichtvierbeinige Weſen ſind Thiere.

59. Es giebt zwei Arten von schneidenden Begriffen, **abschneidende** und **kreuzende Begriffe**, bei den abschneidenden findet die vollnichtende Behauptung (Behauptung vom ganzen Nichtdinge) bei den kreuzenden die theilnichtende Leugnung (Leugnung vom Stücke des Nichtdinges) Statt.

Die erste Art der schneidenden Begriffe werden passend abschneidende genannt, denn es ſind zwar

$$xa \angle u \quad xa \angle \bar{u} \quad xu \angle a \quad xu \angle \bar{a}$$
$$x\bar{a} \angle u \quad x\bar{u} \angle a$$

aber es ſind nicht in dieſem Falle $x\bar{a} \angle \bar{u}$ und $x\bar{u} \angle \bar{a}$, dagegen finden bei der zweiten Art der Schneidung alle dieſe 4 Verhältnisse Statt, dieſelben ſind alſo krenzend.

Nennen wir z. B. alle, die nicht Pommern ſind, Fremde, die Pommern aber Nichtfremde, ſo ſind die Begriffe: Deutscher und Fremder abschneidende, wo alle Nichtfremden Deutsche nnd alle Nichtdeutschen Fremde ſind; dagegen ſind die Begriffe Thier und vierbeiniges Weſen krenzend

Abschnitt 3. Die Schlussbildung.

60. Erkärung. Wenn zwischen drei Begriffen zwei Urtheile gegeben ſind, aus deren Verbindung ſich ein neues Urtheil ableiten lässt, ſo heisen die gegebenen Urtheile die Vorſätze oder Prämissen (protásis, praemissa), das abgeleitete Urtheil der Schluss (syllogismós, conclusio), die Form der Verknüpfung die Schlussform oder Schlussfigur (schêma).

Von den drei Begriffen heist der beiden Urtheilen gemeinſame der Mittelbegriff (mésos hóros, terminus medius), die beiden im Schlussſatze enthaltenen die Schlussbegriffe (ákron, terminus conclusus), und zwar heist der Dingbegriff (Subject) des Schlussſatzes der Unterbegriff (elátton hóros, t. minor), der Thatbegriff (Prädicat) des Schlussſatzes der Oberbegriff (meízon hóros, t. major).

Von den beiden Vorſätzen oder Prämissen heist der mit dem Unterbegriffe der Unterſatz (propositio minor), der mit dem Oberbegriffe der Oberſatz (propositio major). Die Hauptform des Schlusses ist $a \angle u$, $u \angle c$, alſo $a \angle c$. Hier ist a der Unter-, u der Mittel-, c der Oberbegriff, $a \angle u$ der Unterſatz, $u \angle c$ der Oberſatz, $a \angle c$ der Schlussſatz.

Beispiel. Das Quadrat ist eine Rombe, die Rombe hat 4 gleiche Seiten, alſo hat das Quadrat 4 gleiche Seiten.

61. Die Ordnung der gegebenen Urtheile ist willkürlich.

Beweis. Denn die beiden Vorſätze (Prämissen) bilden eine begriffliche Summe, deren Stücke ſich beliebig vertauschen lassen.

62. Von den zwei gegebenen Urtheilen muss eins ein allgemeines ſein, wenn für die Schlussbegriffe ein Schluss folgen ſoll, oder

Zwei theilweiſe oder particulare Urtheile geben für die Schlussbegriffe keinen Schluss.

Beweis. Wenn zwei theilweiſe oder particulare Urtheile gegeben ſind, ſo ist die Form derſelben (nach No. 46) $xa = yu$ und

vu = zc, wo a, u und c beliebige Zeichen haben, auch u in beiden Gleichungen verschiedene Zeichen haben kann und x, y, v und z unbestimmte Begriffe ungleich Null ſind. Eine neue Gleichung lässt ſich daraus für a und c nicht ableiten, da yu und vu ganz verschiedene Begriffe darstellen können.

Beispiele. Einige Säugethiere haben Flossen, einige Flossen habende ſind Hechte; es folgt nicht, dass einige Säugethiere Hechte ſind. Einige Menschen ſind blinde Weſen, einige blinde Weſen ſind Maulwürfe, es folgt nicht, dass einige Menschen Maulwürfe ſind.

63. In jedem Schlusse kann man statt des Nichtes eines Begriffes den Begriff ſelbst einführen, und ſind daher nur die Schlussformen mit den Selbstbegriffen (poſitiven Begriffen) zu behandeln.

Beweis a. Wenn der Mittelbegriff in beiden Vorſätzen (Prämissen) dasſelbe Zeichen hat. Es ſeien von den drei gegebenen Begriffen a, u und c beliebige Nichte von Begriffen, ſo ſetze man $\bar{a} = a_1$, $\bar{u} = u_1$, $\bar{c} = c_1$ und führe in den Vorſätzen statt der gegebenen Nichte $\bar{a}$ u. ſ. w. die gleichen Selbstbegriffe a_1 u. ſ. w. ein, ſo hat man in den Vorſätzen nur Selbstbegriffe und kann aus dieſen den Schlussſatz ableiten. In dem Schlussſatze führe man dann wieder $\bar{a}$ statt a_1, $\bar{c}$ statt c_1, a statt $\bar{a}_1$ und c statt $\bar{c}_1$ ein (nach No. 31 und 32), ſo hat man den Schluss wieder zwischen den gegebenen Begriffen.

Beweis b. Wenn der Mittelbegriff in beiden Urtheilen verschiedene Zeichen hat. Da (nach No. 62) der eine Vorſatz (Prämisse) ein allgemeines Urtheil enthalten muss, ſo kehre man das eine allgemeine Urtheil um, dann werden (nach 53) mit der Umkehr dieſes Urtheiles auch die Zeichen der Begriffe in dem Urtheile umgekehrt. Der Mittelbegriff wird alſo in beiden Urtheilen dasſelbe Zeichen haben. Die Nichte der Begriffe werden ſich alſo nach Theil a. des Beweiſes ſämmtlich aus dem Schlusse entfernen lassen. Es ſind mithin nur die Vorſätze mit Selbstbegriffen (Prämissen mit poſitiven Begriffen) zu behandeln.

Beispiele. Wenn gegeben $\bar{a} \angle \bar{u}$, $u \angle c$, ſo kehre das erste Urtheil um $u \angle a$, $u \angle c$, ſo ſind alle Begriffe poſitiv. Wenn gegeben $a \angle u$, $\bar{u} \angle c$, ſo kehre das erste um $\bar{u} \angle a$, $\bar{u} \angle c$ und ſetze $\bar{u} = u_1$, alſo $u_1 \angle a$, $u_1 \angle c$; wenn $a \angle u$, $\bar{u} \angle \bar{c}$, ſo kehre beide um $c \angle u$, $u \angle a$ u. ſ. w.

64. Erklärung. Man nennt die Schlussform mit zwei allgemeinen Urtheilen die Vollform oder allgemeine, die mit einem allgemeinen und einem theilweiſen Urtheile die Theilform oder particulare.

Beispiele. Vollschluss: Die Füchſe ſind Säugethiere, die Säugethiere haben eine Brücke im Hirne, alſo haben die Füchſe eine Brücke im Hirne.

Theilschluss: Einige Vögel ſind Schwimmvögel, die Schwimmvögel haben Schwimmhäute, alſo haben einige Vögel Schwimmhäute — Einige Rauten (Parallelogramme) haben rechte Winkel, die rechtwinkligen Vierecke heisen Rechtecke, alſo ſind einige Rauten Rechtecke.

65. **Es giebt für Selbstbegriffe (poſitive Begriffe) vier Vollformen und vier Theilformen, welche nach der Stellung des Mittelbegriffs als innere, hintere, vordere und äusere unterschieden werden.**

Ueberſicht der Schlussformen (Schlussfiguren).

	Vollformen.	Theilformen.
Erste oder innere Schlussform:	$a \angle u \; u \angle c$	$a \angle u \; xu \angle c$
Zweite oder hintere Schlussform:	$a \angle u \; c \angle u$	$a \angle u \; xc \angle u$
Dritte oder vordere Schlussform:	$u \angle a \; u \angle c$	$u \angle a \; xu \angle c$
Vierte oder äusere Schlussform:	$u \angle a \; c \angle u$	$u \angle a \; xc \angle u$

Aristotélēs unterscheidet nur die drei ersten Vollformen in der Reihenfolge, wie ſie hier aufgeführt ſind.

66. **Die vier Schlussformen lassen ſich bei Vollschlüssen und bei Theilschlüssen auf zwei Formen zurückführen, auf die erste oder innere und die dritte oder vordere.**

	Vollformen.	Theilform.u.
Innere Schlussform:	$a \angle u, \; u \angle c$	$a \angle u, \; xu \angle c$
Vordere Schlussform:	$u \angle a, \; u \angle c$	$u \angle a, \; xu \angle c$

Beweis. a. Für die Vollformen (allgemeine Schlussfiguren): In der zweiten Schlussform $a \angle u$, $c \angle u$ kehre man beide Urtheile um, ſo wird daraus (nach No. 53) $\bar{u} \angle \bar{a}$, $\bar{u} \angle \bar{c}$, und ſetze nun $\bar{a} = a_1$, $\bar{u} = u_1$, $\bar{c} = c_1$, ſo erhält man $u_1 \angle a_1$, $u_1 \angle c_1$, d. h. die vordere oder dritte Schlussform. Ebenſo in der vierten Schlussform $u \angle a$, $c \angle u$ kehre man die beiden Urtheile (nach No. 53) um, $\bar{a} \angle \bar{u}$, $\bar{u} \angle \bar{c}$, und ſetze nun $\bar{a} = a_1$, $\bar{u} = u_1$, $\bar{c} = c_1$, ſo ist $a_1 \angle u_1$, $u_1 \angle c_1$, d. h. die innere oder erste Schlussform.

b. Für die Theilformen (particulare Schlussfiguren): Aus der zweiten Schlussform $a \angle u$, $xc \angle u$ wird (nach No. 53) durch Umkehr des zweiten Urtheils $a \angle u$, $xu \angle c$, d. h. die erste Schlussform. Aus der vierten Schlussform $u \angle a$, $xc \angle u$ wird ebenſo $u \angle a$, $xu \angle c$, d. h. die dritte oder vordere Schlussform.

67. **Schlüsse auf die Schlussbegriffe.** Für die Schlussbegriffe giebt nur die innere Vollform Vollschlüsse, die vorderen Schlussformen geben Theilschlüsse, die innere Theilform giebt gar keinen Schluss.

Beweis a. Wenn $a \angle u$, $u \angle c$ gegeben, ſo ist $a = xu$, $u = yc$ (nach No. 46), alſo ist $a = xu = xyc$, d. h. $a \angle c$ (nach No. 46).

b. Wenn $u \angle a$, $u \angle c$ gegeben, ſo ist durch Abschwächung

des ersten Urtheils (nach No. 54) $xa \angle u$, $u \angle c$, d. h. $xa \angle c$ (nach Beweis a).

c. Wenn $u \angle a$, $xu \angle c$, ſo ist durch Umkehr des zweiten Urtheils (nach No 53) $xc \angle u$, $u \angle a$, alſo $xc \angle a$ (nach Beweis a), mithin durch Umkehr $xa \angle c$

d. Wenn $a \angle u$, $xu \angle c$, ſo ist (nach No. 46) $a = yu$, $xu = zc$, d. h. über das Verhältniss von a zu c ergiebt ſich nichts.

Beispiele. Innere Vollform: Die Katzen ſind Raubthiere, die Raubthiere haben Krallen, alſo haben die Katzen Krallen.

Vordere Vollform: Die Adler ſind Raubthiere, die Adler ſind Vögel, alſo ſind einige Raubthiere Vögel.

Vordere Theilform: Die Geier ſind Vögel, einige Geier rauben Kinder, alſo rauben einige Vögel Kinder.

Innere Theilform: Die Adler ſind Vögel, einige Vögel haben Schwimmhäute. Ein Schluss zwischen Adler und Vögeln, die Schwimmhäute haben, lässt ſich nicht aufstellen.

68. Alle Schlussformen, welche ſich nicht auf die erste oder innere Form ($a \angle u$, $u \angle c$) zurückführen lassen, wo u in beiden Urtheilen gleiches Zeichen hat, übrigens aber a nur Stück eines Begriffes oder particular ſein kann und die Zeichen der drei Begriffe beliebig ſein können, geben keinen Schluss für die Schlussbegriffe.

Beweis und Beispiele: Unmittelbar aus No. 67.

69. Es giebt drei Reihen von Schlussformen:

Erste Reihe (Vollform): Wenn $a \angle u$, $u \angle c$, ſo ist $a \angle c$.

Zweite Reihe (Theilweiſer Unterſatz): Wenn $xa \angle u$, $u \angle c$, ſo ist $xa \angle c$.

Dritte Reihe (Theilweiſer Oberſatz): Wenn $u \angle a$, $xu \angle c$, ſo ist $xa \angle c$.

Beweis: Unmittelbar aus dem Beweiſe von No. 67.

70. Durch Umkehr der Urtheile lassen ſich in jeder Reihe die vier Schlussformen ableiten. Es giebt demnach überhaupt 12 Schlussformen.

Tafel der Schlussformen.

Erste Reihe (Vollformen).

Erste oder innere Schlussform:	$a \angle u \quad u \angle c$	$a \angle c$
Zweite oder hintere Schlussform:	$a \angle u \quad \bar{c} \angle \bar{u}$	
Dritte oder vordere Schlussform:	$\bar{u} \angle \bar{a} \quad u \angle c$	
Vierte oder äusere Schlussform:	$\bar{u} \angle \bar{a} \quad \bar{c} \angle \bar{u}$	

Zweite Reihe (Theilweiſer Unterſatz).

Erste oder innere Schlussform:	$xa \angle u \quad u \angle c$	$xa \angle c$
Zweite oder hintere Schlussform:	$xa \angle u \quad \bar{c} \angle \bar{u}$	
Dritte oder vordere Schlussform:	$xu \angle a \quad u \angle c$	
Vierte oder äusere Schlussform:	$xu \angle a \quad \bar{c} \angle \bar{u}$	

Dritte Reihe (Theilweiler Oberfatz).

Erste oder innere Schlussform:	$\bar{u} \angle \bar{i}$ $xu \angle c$	$xa \angle c$
Zweite oder hintere Schlussform:	$\bar{u} \angle \bar{u}$ $xc \angle u$	
Dritte oder vordere Schlussform:	$u \angle a$ $xu \angle c$	
Vierte oder äusere Schlussform:	$u \angle a$ $xc \angle u$	

Beispiele. Erste Reihe:

1. Der Efel ist ein Pferd, das Pferd ist ein Hufer,
2. Der Efel ist ein Pferd, kein Nichthufer ist ein Pferd,
3. Kein Nichtpferd ist ein Efel, das Pferd ist ein Hufer,
4. Kein Nichtpferd ist ein Efel, kein Nichthufer ist ein Pferd,

} alfo ist der Efel ein Hufer.

Zweite Reihe:

1. Einige Flügelthiere find Fledermäufe, die Fledermäufe find Säugethiere,
2. Einige Flügelthiere find Fledermäufe, kein Nichtfäuger ist eine Fledermaus,
3. Einige Mäufe find Flügelthiere, die Mäufe find Säugethiere,
4. Einige Mäufe find Flügelthiere, kein Nichtfänger ist eine Maus,

} alfo find einige Flügelthiere Säugethiere.

Dritte Reihe:

1. Kein Nichtfänger ist ein Wall, einige Walle haben Flossen,
2. Kein Nichtfäuger ist ein Wall, einige Flossenhabende find Walle,
3. Die Walle find Säugethiere, einige Walle haben Flossen,
4. Die Walle find Säugethiere, einige Flossenhabende find Walle,

} alfo haben einige Säugethiere Flossen.

71. Die Schlussformen ohne Nichtding (negatives Subject).

Da die alte Logik die Schlussformen mit dem Nichtdinge oder negativen Subjecte, wenn auch mit Unrecht, verwirft, fo wird es erforderlich fein, um den Schlussformen der alten Logik näher zu treten, die Nichtdinge oder negativen Subjecte ganz zu entfernen. Die obigen Schlussformen erhalten dann folgende Gestalt.

Schlussformen ohne Nichtding (negatives Subject).

Schlussform.	1. Reihe (Vollform).	2. R. (Theilw. Unterf.).
Erste oder innere:	$a \angle u$, $n \angle c$, fo $a \angle c$	$xa \angle u$, $u \angle c$, fo $xa \angle c$
Zweite oder hintere:	$a \angle u$, $c \angle \bar{u}$, fo $a \angle \bar{c}$	$xa \angle u$, $c \angle \bar{u}$, fo $xa \angle \bar{c}$
Dritte oder vordere:	fehlt	$xu \angle a$, $u \angle c$, fo $xa \angle c$
Vierte oder äusere:	$n \angle \bar{u}$, $c \angle u$, fo $a \angle \bar{c}$	$xn \angle a$, $c \angle \bar{u}$, fo $xa \angle \bar{c}$

3. Reihe (Theilw. Oberfatz).

Erste oder innere:	fehlt
Zweite oder hintere:	fehlt
Dritte oder vordere:	$u \angle a$, $xu \angle c$, fo $xa \angle c$
Vierte oder äusere:	$u \angle a$, $xc \angle u$, fo $xa \angle c$

72. Die dritte Schlussform der ersten Reihe, die erste und zweite Form der dritten Reihe, in denen fich das Nichtding oder

negative Subject nicht vermeiden lässt, fehlen der alten Logik. Es sind dies die Formen:

$\bar{u} \angle \bar{a}$, $u \angle c$, also $a \angle c$; $\bar{a} \angle \bar{u}$, $xu \angle c$, also $xa \angle c$;
$\bar{u} \angle \bar{u}$, $xc \angle u$, also $xa \angle c$.

73. Die Schlussfiguren der alten Logik.

Die alte Logik theilt jede Form, wenn man die Zeichen der Thaten oder Prädicate verändern kann, in zwei Figuren. Auserdem fügt sie zu den obigen Schlüssen noch vier geschwächte, in denen mehr vorausgesetzt ist, als zu dem Schlusse erforderlich ist. Endlich bezeichnet sie jede Form durch ein Wort mit drei Vocalen, dessen erster Vocal den Obersatz, dessen zweiter Vocal den Untersatz und dessen dritter Vocal den Schlusssatz bezeichnet, und zwar nach der in No. 51 angegebenen Regel, so dass a die volle Behauptung (affirmatio universalis), e die volle Leugnung (negatio univ.), i die theilweise Behanptung (affirm. particnlaris), o die theilweise Leugnung (negatio partic.) bezeichnet. Dann ergiebt sich folgende Uebersicht:

Uebersicht der Schlussfignren der alten Logik.

Schlussfigur.	Erste Reihe.	Zweite Reihe.
1	$a \angle u$, $n \angle c$, so $a \angle c$ barbara.	$xa \angle u$, $n \angle c$, so $xa \angle c$ darii.
	$a \angle n$, $u \angle \bar{c}$, so $a \angle \bar{c}$ celarent.	$xa \angle u$, $u \angle \bar{c}$, so $xa \angle \bar{c}$ ferio.
2	$a \angle n$, $c \angle \bar{u}$, so $a \angle \bar{c}$ cesare.	$xa \angle u$, $c \angle \bar{u}$, so $xa \angle \bar{c}$ festino.
	$a \angle \bar{u}$, $c \angle u$, so $a \angle \bar{c}$ camestres.	$xa \angle \bar{u}$, $c \angle u$, so $xa \angle \bar{c}$ baroco.
3	fehlt	$xu \angle a$, $u \angle c$, so $xa \angle c$ datisi.
	fehlt	$xu \angle a$, $u \angle \bar{c}$, so $xa \angle \bar{c}$ ferison.
4	$u \angle \bar{a}$, $c \angle u$, so $a \angle \bar{c}$ calentes.	$xu \angle a$, $c \angle \bar{u}$, so $xa \angle \bar{c}$ fresison.

	Dritte Reihe.
1	fehlt
	fehlt
2	fehlt
	fehlt
3	$u \angle a$, $xu \angle c$, so $xa \angle c$ disamis.
	$u \angle a$, $xn \angle \bar{c}$, so $xa \angle \bar{c}$ bocardo.
4	$u \angle a$, $xc \angle n$, so $xa \angle c$ dibatis.

Geschwächte Schlüsse.

	Zweite Reihe.	Dritte Reihe.
3	$u \angle a$, $n \angle \bar{c}$, so $xa \angle \bar{c}$ felapton.	$u \angle a$, $u \angle c$, so $xa \angle c$ darapti.
4	$u \angle a$, $c \angle \bar{u}$, so $xa \angle \bar{c}$ fesapo.	$u \angle a$. $c \angle u$, so $xa \angle c$ baralip.

Die erste Figur nennt man das dictum de omni et nullo, die zweite das dictum de diverso, die dritte das dictum de exemplo,

die vierte das dictum de reciproco. Es haben sich also sämmtliche Figuren der Schlüsse durch reine Formenentwickelung ergeben.

Beispiele Erste Reihe:

1. barbara: Der Esel ist ein Pferd, das Pferd ist ein Hufer; also ist der Esel ein Hufer.
   celarent: Der Esel ist ein Pferd, kein Pferd hat gespaltene Hufe; also hat auch kein Esel gespaltene Hufe.
2. cesare: Das Pferd ist ein Hufer, kein Pfötler ist ein Hufer; also ist kein Pferd ein Pfötler.
   camestres: Kein Pferd ist ein Spalthufer, die Wiederkäuer sind Spalthufer; also ist kein Pferd ein Wiederkäuer.
4. calemes: Kein Sumpfvogel ist ein Schwimmvogel, der Storch ist ein Sumpfvogel; also ist kein Schwimmvogel ein Storch.

Zweite Reihe:

1. darii: Einige Raubvögel sind Eulen, die Eulen sind Nachtvögel; also sind einige Raubvögel Nachtvögel.
   ferio: Einige Raubvögel sind Eulen, keine Eule ist ein Tagvogel; also sind einige Raubvögel nicht Tagvögel.
2. festino: Einige Schwimmvögel sind Enten, kein Schwan ist eine Ente; also sind einige Schwimmvögel nicht Schwäne.
   baroco: Einige Menschen sind gottlos (nicht fromm), die braven Menschen sind fromm; also sind einige Menschen nicht brav.
3. datisi: Einige Heuchler sind Freunde, die Heuchler sind Schurken; also sind einige Freunde Schurken.
   ferison: Einige Heuchler sind Freunde, kein Heuchler ist brav; also sind einige Freunde nicht brav.
4. fresison: Einige Heuchler sind Freunde, kein ehrlicher Mann ist ein Heuchler; also sind einige Freunde nicht ehrliche Männer.

Geschwächte:

3. felapton: Die Pferde sind Säugethiere, kein Pferd ist ein Wiederkäuer; also sind einige Säugethiere nicht Wiederkäuer.
4. fesapo: Die Pferde sind Säugethiere, kein Wiederkäuer ist ein Pferd; also sind einige Säugethiere nicht Wiederkäuer.

Dritte Reihe:

3 disamis: Die Käfer sind Kerfe (Insecten), einige Käfer sind Wasserthiere; also sind einige Kerfe Wasserthiere.
   bocardo: Die Käfer sind Kerfe, einige Käfer sind nicht schädlich; also sind einige Kerfe nicht schädlich.
4. dimatis: Die Käfer sind Kerfe, einige Wasserthiere sind Käfer; also sind einige Kerfe Wasserthiere

Geschwächte:

3. darapti: Die Walle sind Säugethiere, die Walle haben Flossen; also haben einige Säugethiere Flossen.
4. bamalip: Die Walle sind Säugethiere, die Wallrosse sind Walle; also sind einige Säugethiere Wallrosse.

Es ist leicht, Beispiele dieser Art zu bilden, und übt die Schärfe des Geistes ungemein; es kann daher das Bilden von Beispielen nicht genug empfohlen werden.

74. **Kettenschluss** (Inductionsschluss).

$a_1 {}^*\angle a_n$, * wenn $a_a \angle a_{a+1}$ oder

Wenn in einer Reihe von Begriffen jeder vorhergehende dem nächstfolgenden gleich oder eingeordnet ist, fo ist auch der erste jedem folgenden gleich oder eingeordnet.

Beweis. Wenn der Satz gilt für einen beliebigen Begriff a_m, fo dass $a_1 \angle a_m$, fo gilt er auch für den nächstfolgenden Begriff a_{m+1}; denn es ist

$a_1 \angle a_m$ (nach Annahme) und

$a_m \angle a_{m+1}$ (gegeben)

alfo ist auch $a_1 \angle a_{m+1}$ (nach 125)

Nun ist $a_1 \angle a_2$, alfo auch in dem nächstfolgenden und in jedem folgenden, was zu beweifen war.

Schlüsse für Summen uud Zeuge oder Producte.

75. **Summenschluss.**

$$(a \angle c) + (u \angle c) = (a + u) \angle c.$$

Wenn zwei Begriffe einem dritten untergeordnet find, fo ist auch die Summe jener Begriffe dem dritten untergeordnet und

Wenn die Summe zweier Begriffe einem dritten untergeordnet ist, fo ist auch jeder der beiden Begriffe dem dritten untergeordnet.

Beweis a. Wenn $a \angle c$, fo ist $a + c = c$, und wenn $u \angle c$, fo is $u + c = c$ (nach 75), alfo ist

$c = c + c$ (nach No. 5)

$= a + c + u + c$

$= a + u + c$ (nach No. 5)

d. h. $(a + u) \angle c$ (nach No. 14)

b. Wenn $(a + u) \angle c$, fo ist $a \angle (a + u)$, $(a + u) \angle c$, alfo $a \angle c$ und ebenfo auch $u \angle c$.

Beispiele. Die Dänen find Deutsche, die Schweden find Deutsche, alfo find die Dänen und Schweden Deutsche Umgekehrt die Franken und Briten find Deutschcelten, alfo find die Franken Deutschcelten und die Briten Deutschcelten.

Durch diefen Summenschluss entstehen die **Summenurtheile** (z. B. Karl, Heinrich und Friedrich traten ein, oder fowohl Karl als Heinrich traten ein oder, in der annehmenden Satzform, wenn dies ist, wenn jenes ist, wenn das eintritt u. f. w., fo ist auch.

Urtheile von der Form $a \angle (u + c)$, wo u und c gleich oder eingeordnet find, geben nichts neues und find gedankenlos, es genügt, wenn u der dem c untergeordnete Begriff ist, das Urtheil $a \angle u$. Wenn dagegen u und c nicht gleich oder eingeordnet find, fondern getrennt find, fo heisen die Urtheile von der Form $a \angle (u + c)$ **Trennurtheile** oder **disjunctive Urtheile**. Die sprachliche Form derfelben ist: a ist entweder u oder c

(z. B. Jedes Rechteck ist entweder gleichseitig oder ungleichseitig. Jedes Wort hat entweder einen oder mehre Werthe. Jede Gröse ist entweder einer anderen gleich oder ungleich.

76. Zeugschluss.

$$(a \angle u) + (a \angle c) = a \angle uc$$

Wenn ein Begriff zweien Begriffen untergeordnet ist, so ist er auch dem Zeugbegriffe oder Producte untergeordnet und

Wenn ein Begriff dem Zeuge oder Producte zweier Begriffe untergeordnet ist, so ist er auch jedem der beiden Merkmale untergeordnet.

Beweis a. Wenn $a \angle u$, so ist $a = au$, und wenn $a \angle c$, so ist $a = ac$ (nach 19), mithin ist $a = ac = auc$, d. h. $a \angle uc$ (nach 19).

b. Wenn $a \angle uc$, so ist $a \angle uc$, $uc \angle c$, also $a \angle c$ und ebenso $a \angle u$.

Beispiele Der Mensch ist ein Geist, der Mensch ist endlich, also ist der Mensch ein endlicher Geist. Das Thier ist ein organisches Wesen, das Thier hat willkürliche Bewegung, also ist das Thier ein organisches Wesen mit willkürlicher Bewegung. Das Rechteck ist eine Raute (Parallelogramm), das Rechteck hat rechte Winkel, also ist das Rechteck eine Raute mit rechten Winkeln.

Jedes neue Merkmal, welches von einem Dinge aufgefunden wird, wird mit den früheren Merkmalen durch Verflechtung oder Multiplication verbunden. Die Erklärung oder Definition eines Dinges bildet auf diese Weise das Zeug oder Product der sämmtlichen Merkmale, welche dem Dinge beigelegt sind. So z. B die Erklärung: das Quader oder Quadrat ist eine Raute mit gleichen Seiten und rechten Winkeln, so die Erklärung das Pferd ist ein säugendes Wirbelthier, welches an jedem Fusse nur einen Huf hat.

Das Zeug oder Product der Merkmale hat aber in der Sprache nicht selten die Gestalt einer Summe, und muss man sich wohl hüten, das Urtheil dann nicht für ein Summenurtheil zu halten, da es vielmehr ein Zeugurtheil oder ein Product ist. So z. B. das Urtheil: der Körper hat Länge, Breite und Dicke scheint die Form eines Summenurtheils zu haben, ist aber keines, sondern ein Zeugurtheil; denn der Körper gehört nicht zu der Summe der Dinge, welche nur Länge, oder welche nur Breite, oder nur Dicke, kurz nur eine Ausdehnung haben, sondern allein zu denen, welche alle drei Ausdehnungen, Länge, Breite und Dicke zugleich, d. h. welche das Zeug oder Product von Länge, Breite und Dicke haben. Die Gestalt der Summe in diesem Satze rührt aber von der Zusammenziehung der Sätze her. Das Zeugurtheil $a \angle ued$ ist nämlich gleich der Summe dreier Urtheile $(a \angle u) + (a \angle c) + (a \angle d)$ nach No. 76, und diese drei Urtheile zieht die Sprache in einen Satz zusammen. Der zusammengezogene Satz ist also kein Summenurtheil, sondern die Summe mehrer Urtheile. Sind die Dinge oder Subjecte zusammengezogen, z B a, u und c sind d, so ist die Summe ein Summenurtheil; denn $(a \angle d) + (u \angle d) + (c \angle d) = (a + u + c) \angle d$ (nach 75). Sind die Thaten oder Prädicate zusammengezogen, z. B. a ist u. c und d, so ist

die Summe ein Zeugurtheil; denn $(a \angle u) + (a \angle c) + (a \angle d) = a \angle ncd$ (nach 76).

Die Form der Summe von Urtheilen wird in der Sprache namentlich dann gerne festgehalten, wenn die Merkmale schneidende Begriffe ſind, z. B. das Quader oder Quadrat ist eine Raute mit rechten Winkeln (alſo ein Rechteck) und mit gleichen Seiten (alſo eine Rhombe). Dagegen tritt ſie nicht ein, wenn das vorhergehende Merkmal durch das nächstfolgende in Unterabtheilungen zerlegt wird. So z. B. das Quader oder Quadrat ist ein Rechteck mit gleichen Seiten; das Pferd ist ein ſäugendes Thier mit einem Hufe. Denn die Säugethiere werden eingetheilt in Flosser, Hufer, Pföter und Handthiere.

77. Von den vier Schlussformen in No. 66 giebt nur die vordere Vollform Vollschlüsse für Summen und Zeuge (Producte), die anderen Formen geben nur Theilschlüsse, die innere Theilform giebt für Zeuge (Producte) keinen Schluss.

Ueberſicht der Schlüsse auf Summen und Zeuge (Producte).

Schlussform.	Form.	Summenschluss.	Zeugschluss.
1. Vordere Vollform:	$u \angle a \quad u \angle c$	$(\bar{a} + \bar{c}) \angle \bar{u}$	$u \angle ac$
2. Vordere Theilform:	$u \angle a \quad xu \angle c$	$(xa + yc) \angle u$	$xu \angle ac$
3. Innere Vollform:	$a \angle u \quad u \angle c$	$(a + xc) \angle u$	$xu \angle ac$
4. Innere Theilform:	$a \angle u \quad xu \angle c$	$(a + xc) \angle u$	kein Schluss.

Beweis a. Summenschlüsse.

1. Wenn $u \angle a$ und $u \angle c$, ſo ist durch Umkehr $\bar{a} \angle \bar{u}$ und $\bar{c} \angle \bar{u}$, alſo ist $(\bar{a} + \bar{c}) \angle \bar{u}$.
2. Wenn $u \angle a$ und $xu \angle c$, ſo ist durch Umkehr $xa \angle u$ und $yc \angle u$, alſo ist $(xa + yc) \angle u$.
3. Wenn $a \angle u$ und $u \angle c$, ſo ist durch Umkehr $a \angle u$ und $xc \angle u$, alſo ist $(a + xc) \angle u$.
4. Wenn $a \angle u$ und $xu \angle c$, ſo findet dasſelbe Statt.

b. Zeugschlüsse.

1. Wenn $u \angle a$ und $u \angle c$, ſo ist $u \angle ac$ (nach 76).
2. Wenn $u \angle a$ und $xu \angle c$, ſo ist $xu \angle a$ und $xu \angle c$, alſo $xu \angle ac$.
3. Wenn $a \angle u$ und $u \angle c$, ſo ist auch durch Umkehr $xu \angle a$ und $xu \angle c$, alſo $xu \angle ac$.
4. Wenn $a \angle u$ und $xu \angle c$, ſo ist durch Umkehr $yu \angle a$ und $xu \angle c$, alſo $yxu \angle a$, d. h. da $yx = 0$ oder x und y disjunct ſein können, ſo folgt in dieſem Falle nichts.

Beispiele.

1. Summenschluss: Das Quader ist ein Rechteck, das Quader ist eine Rhombe; alſo ist kein Nichtrechteck und keine Nichtrhombe ein Quader.
Zeugschluss: Das Quader ist ein Rechteck, das Quader ist eine Rhombe; alſo ist das Quader ein Rechteck mit gleichen Seiten.

2. Summenschluss: Die Deutschen find Europäer, einige Deutsche find Amerikaner; alfo find einige Europäer und einige Amerikaner Deutsche.

Zeugschluss: Die Deutschen find Europäer, einige Deutsche find Amerikaner; alfo find einige Deutsche Europäer, die in Amerika leben.

3. Summenschluss: Die Rinder find Wiederkäuer, die Wiederkäuer find Säugethiere; alfo find die Rinder und einige Säugethiere Wiederkäuer.

Zeugschluss: Die Rinder find Wiederkäuer, die Wiederkäuer find Säugethiere; alfo find einige Wiederkäuer fäugende Rinder.

4. Summenschluss: Die Hirsche find gehörnt, einige gehörnte Thiere find Hausthiere; alfo find die Hirsche und einige Hausthiere gehörnt.

78. Trennschluss. Indirecter Schluss. Wenn ein Begriff der Summe zweier Begriffe und zugleich dem Nichte (der Negation) des einen untergeordnet ist, fo ist er dem andern untergeordnet, oder

Wenn $a \angle (u + o)$ und $a \angle \bar{u}$, fo ist $a \angle o$.

Beweis. Da $a \angle (u + c)$, fo ist $a = a(u + c)$ (nach 19)

$= au + ac$ (nach 2)

$= ac$ (nach 33)

d. h. $a \angle o$.

Beispiele. Jedes Dreieck hat entweder rechte Winkel oder schiefe Winkel, nun hat es nicht rechte Winkel, alfo hat es schiefe Winkel.

Eine Seite ist einer andern entweder gleich, kleiner oder gröser, nun ist fie nicht gleich, auch nicht kleiner, alfo ist fie gröser als die andere.

Jedes Thier ist entweder ein Flosser, oder ein Füser, oder ein Schwinger, oder ein Wirbelthier; nun ist kein Krebs ein Flosser, oder ein Schwinger, oder ein Wirbelthier, alfo ist der Krebs ein Füser.

79. Wenn das Zeug oder Product zweier Begriffe und zugleich das Nicht (die Negation) des einen einem dritten Begriffe untergeordnet ist, fo ist auch der zweite dem dritten untergeordnet, oder

Wenn $au \angle o$ und $\bar{u} \angle c$, fo ist $u \angle c$.

Beweis. Man fetze $u = au + u_1$, wo u_1 mit a disjunct, dann ist (nach 33) $u_1 \angle \bar{a}$, $\bar{a} \angle c$, alfo $u_1 \angle c$. Aber auch $au \angle o$, alfo auch die Summe $(au + u_1) \angle c$, d. h. auch $u \angle o$.

Beispiele. Die körperlichen Gotteskinder find Geister und die nicht körperlichen Wefen find Geister, alfo find die Gotteskinder Geister.

80. Wenn $a + c = u + c$ und $a \angle \bar{c}$ und $u \angle \bar{c}$, fo ist auch $a = u$.

Wenn zwei Summen von je zwei Trennbegriffen (disjuncten Begriffen) einander gleich find, und das eine Stück ist in beiden Summen gleich, fo ist auch das andere Stück gleich.

Beweis. Es ist $a = a(a + u)$ (nach No. 15 und 19)

$= a(c + u)$ (nach Annahme)

$= ac + au$ (nach 2)

$a = au$ (da $ac = 0$ nach 33)

alfo $a \angle u$.

Ebenfo folgt $u \angle a$, alfo ist $a = u$ (nach 21).

Beispiele. Die Wiederkäuer und Pferde find gleich den Hornthieren und Pferden,

Kein Wiederkäuer ist ein Pferd, kein Hornthier ist ein Pferd, alfo find die Wiederkäuer gleich den Hornthieren.

Die Lehre von den Schlüssen ist hiemit vollendet, und hat damit zugleich die ganze Begriffslehre ihren Abschluss gefunden. Die weitere Ausbildung der Begriffe fetzt die Wefenslehre voraus, welche in der Wissenslehre ihre Behandlung finden wird. Hier genügt es, auf diefelbe zu verweifen.

Die

Bindelehre oder Combinationslehre.

Drittes Buch

der

Formenlehre oder Mathematik

von

Robert Grassmann.

Stettin, 1872.

Druck und Verlag von R. Grassmann.

Einleitung

in die

Bindelehre oder Combinationslehre.

Die Bindelehre[1]) oder Combinationslehre ist eine junge Wissenschaft. Den alten Völkern blieb fie gänzlich unbekannt. Die ersten Verfuche in derfelben machte 1559 Joh. von Buteo, indem er verfuchte die mit 4 Würfeln möglichen Würfe zu berechnen; es führte ihn dies auf die vier ersten Klassen der Combinationen aus 6 Elementen. Nach ihm entwickelten 1615 Franz Viēta und 1621 Harriot einzelne Sätze über Combinationen. Der erste aber, der die Combinationslehre als eigne Wissenschaft aufstellte, war Leibnitz, der wie in allen Zweigen der Mathematik fo auch hier Bahn brechend auf trat. Bereits 1666 entwickelte er in feiner dissertatio de arte combinatoriā die Grundfätze der Wissenschaft; die spätern Zeiten haben wenig Bedeutendes hinzugebracht. Da die Combinationslehre bis heute in diefem unvollkommnen und unentwickelten Zustande geblieben ist, fo bedurfte es einer vollständigen Neubegründung der Wissenschaft, und musste es mir daher auch erlaubt fein, neue, dem Begriffe entsprechende Bezeichnungen einzuführen

Auch für die Bindelehre oder Combinationslehre gelten die in der Grösenlehre abgeleiteten Gefetze des Zufügens und Webens, foweit fie nicht die Vertauschung der Faktoren betreffen. Setzt man die in No. 2 aufgeführten Gefetze des Zufügens oder des Addirens und des Webens oder des Multiplicirens ohne Vertauschung der Faktoren als bekannt voraus, fo kann man die Bindelehre ohne jede Vorbereitung beginnen. Jede Gröse hat auch in der Bindelehre nur einen und nicht mehre Werthe.

Eigenthümlich find der Bindelehre die Gefetze, dass die Summe zweler gleichen Stifte oder Elemente wieder dasfelbe Stift giebt, dass dagegen das Zeug oder Product zweier gleichen Stifte oder Elemente nicht wieder dasfelbe Stift giebt. Das Product der Grösen heist in der Bindelehre ein Gebinde (Combination im weitern Sinne), die Stufe oder der Exponent, welchen schon Leibnitz ganz richtig als Exponenten erkannt und alfo ge-

[1]) Binde ist ein altes Verb bhandh sskr. bandh, lit. bènd-ras, goth. binda, band und bezeichnet das Verbinden mehrer Grösen zu einem Ganzen. Combinatio, d. h. die Verbindung zweier Grösen, ist viel zu eng, da in diefer Wissenschaft beliebig viele Grösen verbunden werden können.

nannt hat, heist in der Bindelehre die Klasse[2]). Von den Gebinden giebt es wieder zwei Gattungen: Geschiede[3]) (Complexionen nach Leibnitz), für welche Vertauschung der Faktoren gilt, und Geänder[4]) (Variationen), für welche keine Vertauschung der Faktoren gilt. Von jeder dieser Gattungen giebt es wieder zwei Arten: Vollgeschiede und Vollgeänder (Combinationen mit Wiederholung), bei denen das Product gleicher Stifte ungleich Null ist, und Ausgeschiede und Ausgeänder (Combinationen ohne Wiederholung), bei denen das Product gleicher Stifte Null ist. Die Rgeschiede und Rgeänder (Combinationen mit rfacher Wiederholung) bilden eine Zwischenart. Die Ausgeänder aus n Stiften zur nten Klasse heisen Gefolge[5]).

Die Darstellung beginnt mit der Aufstellung der verschiedenen Arten von Gebinden und entwickelt dann die Gesetze für die Klassen der Zweiglieder und Vielglieder oder den Binomischen und Polynomischen Lehrsatz. Die Sätze über die Anzahl der Gebinde, der Binomische und Polynomische Lehrsatz für Zahlen bilden nur Anwendungen dieser Gesetze auf die Zahlenlehre.

Alle Kunstausdrücke sind auch in der Bindelehre rein deutsch gebildet und die gewöhnlichen lateinischen Ausdrücke daneben gesetzt, um jedem die freie Wahl zwischen diesen Ausdrücken zu lassen.

---

[2]) Klasse ist aus dem lat. classis entlehnt, und dies aus dem griech. klêsis Es stammt vom alten Verb kal, sskr. kar, griech. kaléō, ahd. halōn, nhd. halle, rufe und bezeichnet bei den Römern zunächst die zusammengerufene Volksversammlung, dann die Abtheilung im Allgemeinen. Für die Stufe ist der Ausdruck bereits gebräuchlich.

[3]) Geschiede stammt vom alten Verb skid, sskr. chid, gr. schíd-jō, lat. scindo, scidi, goth. skaida, ahd. skeidan, nhd. scheiden, spalten, trennen. Darnach heisen Geschiede die Gebinde, welche verschiedene Stifte oder Elemente enthalten und sich dadurch unterscheiden.

[4]) Geänder stammt vom alten Formstamm ana jener. Hieraus ist durch die Steigerungsendung tar, darüber hinausgehend, antara der über jenen hinausgehende, goth. anthar, nhd. Andere gebildet und daraus das Verb ändern, anders gestalten. Die Geänder sind also alle durch andere Elemente oder durch andere Folge derselben Elemente geänderten Gebinde.

[5]) Gefolge sind die Gebinde, welche ganz dieselben Elemente nur in verschiedener Folge haben.

Abschnitt 1. Die Arten der Gebinde.

1. Erklärung. Die Bindelehre oder Combinationslehre ist ein Theil der Formenlehre und gelten für diefelbe folgende Erklärungen der Grösenlehre.

Gröse heist jedes, was Gegenstand des Denkens ist oder werden kanu, fofern es nur einen und nicht mehre Werthe hat. Das Zeichen der Gröse ist der Buchstabe. Derfelbe Buchstabe bezeichnet in derfelben Nummer der Bindelehre stets eine und diefelbe Gröse; im Uebrigen kann jeder Buchstabe jede beliebige Gröse bezeichnen. Ein Satz, der für einen Buchstaben bewiefen ist, gilt mithin für jede Gröse, welche der Buchstabe bezeichnen kann, d. h. für jede beliebige Gröse.

Stift oder Element heist eine Gröse, welche ursprünglich gefetzt ist und welche alfo nicht durch Knüpfung anderer Grösen entstanden ist. Der Buchstabe e ist Zeichen der Stifte.

Knüpfung heist jede Zufammenstellung oder Verbindung von Grösen, welche dem Geiste des Menschen möglich ist, fofern fie nur einen und nicht mehre Werthe hat. Dasfelbe Knüpfungszeichen bezeichnet in derfelben Nummer der Bindelehre stets eine und diefelbe Knüpfung; im Uebrigen kann jedes Knüpfungszeichen, wenn nichts anderes festgefetzt ist, jede beliebige Art der Knüpfung bezeichnen. Ein Satz, der für ein Knüpfungszeichen bewiefen ist, gilt mithin für jede beliebige Art der Knüpfung.

Die Klammer ist das Zeichen, dass die in die Klammer eingeschlossenen Grösen zuvor zu einem Gefammte geknüpft werden follen, ehe dies mit der Gröse auser der Klammer geknüpft werden darf. Stehen mehre Grösen ohne Klammer, fo follen diefelben fortschreitend geknüpft werden, d. h. es foll zunächst die erste mit der zweiten und dann jedesmal das Gefammt mit der nächstfolgenden Gröse geknüpft werden.

Gleich heisen zwei Grösen, wenn man in jeder Knüpfung der Bindelehre die eine statt der andern ohne Aenderung des Werthes fetzen kann. Ungleich heisen zwei Grösen, wenn man in keiner Knüpfung der Bindelehre die eine statt der andern ohne Aenderung

des Werthes fetzen kann. Das Zeichen der Gleichheit ist $=$, der Ungleichheit $\gtrless$.

In der Bindelehre heist die Summe eine Aufstellung, das Zeug oder Product ein Gebinde, das Weben oder Multipliciren ein Binden, die Stufe oder der Exponent eine Klasse.

Soll eine Knüpfung ausdrücklich als der Bindelehre angehörig bezeichnet werden, fo wird über das Knüpfungszeichen ein i gefetzt.

2. Auch in der Bindelehre gelten die Grundformeln und daraus abgeleitet folgende Gefetze der Grösenlehre. Man kann ohne Aenderung des Werthes

1) jede Plus- und Malklammer beliebig fetzen oder weglassen und die Ordnung der Stücke beliebig ändern,
2) beim Binden oder Multipliciren jede Beziehungsklammer auflöfen, indem man jedes Stück des einen Faktors mit jedem des andern bindet oder multiplicirt.
3) beim Höhen jede Klassenfumme auflöfen, indem man die Bafe zu jedem Stücke der Klasse höht und die Höhen bindet, und jedes Klassengebinde auflöfen, indem man die Bafe fortschreitend zu den Faktoren höht, die Ordnung, in welcher man fortschreitend höht, ist beliebig oder man kann beim Potenziren jede Exponentenfumme auflöfen, indem man die Bafe mit jedem Stücke des Exponenten potenzirt und die Potenzen multiplicirt, und jedes Exponentenproduct auflöfen, indem man die Bafe fortschreitend mit den Faktoren des Exponenten potenzirt, die Ordnung, in welcher man fortschreitend potenzirt, ist beliebig. Die Klasse oder die Stufe (der Exponent) ist in der Bindelehre stets eine ganze Zahl und zwar stets eine Pluszahl.
4) Man kann ohne Aenderung des Werthes Null zu jeder Gröse zufügen oder addiren und jede Gröse mit Eins binden oder multipliciren und zur Eins höhen oder potenziren.
5) Jede Gröse giebt mit Null gebunden oder multiplicirt Null, zur Null gehöht oder potenzirt Eins.
6) Das Ergebniss jeder diefer Knüpfungen ist wieder eine Stiftsgröse (Elementargröse), das Zeug oder Product und die Höhe oder Potenz der Stifte oder Elemente ist wieder ein Stift.

3. Für die Bindelehre gelten folgende befondere Gefetze:

1) die Summe zweier gleichen Stifte oder Elemente giebt wieder dasfelbe Stift,

2) das Gebinde oder Product zweier gleichen Stifte giebt nicht wieder dasfelbe Stift und

3) in der Klasse oder dem Exponenten dürfen nur Null und ganze Pluszahlen oder ganze pofitive Zahlen vorkommen.

4. $$e + e = e.$$

Die Summe zweier gleichen Stifte oder Elemente giebt in der Bindelehre wieder dasfelbe Stift.

5. $$a + a = a.$$

Die Summe zweier gleichen Grösen giebt in der Bindelehre wieder diefelbe Gröse.

Beweis: Es fei $a = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$, fo ist

$$a + a = (e_1 + e_2 + \cdots + e_n) + (e_1 + e_2 + \cdots + e_n)$$
$$= (e_1 + e_1) + (e_2 + e_2) + \cdots + (e_n + e_n) \quad \text{(nach No. 2).}$$
$$= e_1 + e_2 + \cdots + e_n \quad \text{(nach No. 4).}$$

6. $$S_{1,n} a = a.$$

Die Summe gleicher Grösen giebt in der Bindelehre wieder diefelbe Gröse.

Beweis (fortleitend): Wenn der Satz für $S_{1,n}a$ gilt, fo gilt er auch für $S_{1,n+1}a$, denn

$$S_{1,n+1}a = S_n a + a$$
$$= a + a \quad \text{(nach der Annahme).}$$
$$= a \quad \text{(nach No. 5).}$$

Nun gilt er für $n = 2$, denn $a + a = a$ (nach No. 5), alfo gilt er auch für jedes folgende n, alfo ganz allgemein.

7. Das Gebinde mehrer Grösen ist, fofern die Faktoren nur verschiedene Stifte oder Elemente enthalten, gleich dem gewöhnlichen Zeuge oder Producte diefer Grösen.

8. Erklärung. Die Gebinde heisen

1) Geschiede oder Complexionen, wenn bei dem Binden oder Multipliciren Vertauschung zweier Stifte als Faktoren gilt, Zeichen $\dot{-}$

2) Geänder oder Variationen, wenn beim Binden oder Multipliciren nicht Vertauschung der Faktoren gilt, Zeichen $\grave{-}$

Soll eine Knüpfung ausdrücklich als den Geschieden oder Geändern angehörig bezeichnet werden, fo wird das entsprechende Zeichen $\dot{-}$ oder $\grave{-}$ über das Knüpfungszeichen gefetzt.

9. $$e_m e_n \dot{=} e_n e_m \qquad e_m e_n \grave{\gtrless} e_n e_m.$$

Für Geschiede gilt die Grundformel der Vertauschung, für Geänder gilt fie nicht.

10. Gefetz der Geschiede. Für die Geschiede gilt das Gefetz der Vertauschung, d. h. man kann ohne Aenderung des

Werthes die Ordnung der Faktoren des Geschiedes beliebig ändern und gilt das Gefetz der Erhöhung, d. h. man kann jedes Bafengeschiede auflöfen, indem man die Grösen des Geschiedes einzeln zu der Klasse erhöht und die Höhen bildet oder
man kann jedes Bafenproduct auflöfen, indem man die Faktoren der Bafe einzeln mit dem Exponenten potenzirt und die Potenzen multiplicirt.

Beweis: Nach No. 9 gilt die Grundformel der Verwebung (Grösenlehre No. 56), alfo gilt nach Grösenlehre No. 57 auch das ganze Gefetz der Verwebung, d. h. die ganze Vertauschung der Faktoren, und gilt demnach nach Grösenlehre No. 72 und 78 auch das ganze Gefetz der Erhöhung.

11. Erklärung. Die Gebinde heisen

a. Ausgebinde oder Combinationen ohne Wiederholung, wenn jedes Gebinde, welches zwei gleiche Stifte oder Elemente enthält, Null ist, Zeichen $\overset{(i)}{=}$,
b. Vollgebinde oder Combinationen mit Wiederholung, wenn das Gebinde, welches gleiche Stifte oder Elemente $\gtrless 0$ enthält, auch ungleich Null ist, Zeichen $\overset{(ii)}{=}$,
c. Rgebinde oder Combinationen mit rfacher Wiederholung, wenn die Gebinde, welche $r-0$ gleiche Stifte $\gtrless 0$ enthalten, ungleich Null, die, welche $r+1$ gleiche Stifte enthalten, Null find, Zeichen $\overset{(ri)}{=}$.

12. $\qquad 0^0=1 \qquad 0^m=0$, wo $m>1$.

Für alle Arten der Gebinde ist die nullte Klasse von Null gleich 1, jede höhere Klasse von Null gleich Null.

Beweis: $0^0=1$ unmittelbar aus No. 2; $0^m=0^1\,0^{m-1}=0\cdot 0^{m-1}=0$ (nach 2).

13. $\qquad ePe \overset{(i)}{=} 0 \qquad e^rPe \overset{(ri)}{=} 0 \qquad e^mPe^n \overset{(ii)}{\gtrless} 0$.

Bei Ansgebinden (Combinationen o. W.) ist jedes Gebinde, welches zwei gleiche Stifte oder Elemente enthält, und bei Rgebinden (Combinationen m. rfacher W.) ist jedes Gebinde, das $r+1$ gleiche Stifte enthält, Null; dagegen ist bei Vollgebinden (Combinationen m. W.) das Gebinde, welches gleiche Stifte $\gtrless 0$ enthält, stets auch ungleich Nnll.

14. $\qquad e^n \overset{(i)}{=} 0 \qquad e^{r+n} \overset{(ri)}{=} 0$, wo $n \geqq 1$.

Bei Ausgebinden (Combinationen o. W.) ist jede nte Klasse, bei Rgebinden (Combinationen m. rfacher W.) jede $(r+n)$te Klasse aus einem Stifte oder Elemente Null, fofern n gleich oder gröser als 1 ist.

Beweis: Angenommen, der Satz gelte für irgend ein n, fo gilt er auch für $n+1$; denn

$e^{n+1} \overset{(i)}{=} e^n \cdot e$ (nach 2). $\qquad e^{(r+n)+1} \overset{(ri)}{=} e^{r+n} \cdot e$ (nach 2).

$\overset{(i)}{=} 0 \cdot e$ (nach Annahme). $\qquad \overset{(ri)}{=} 0 \cdot e$ (nach Annahme).

$\overset{(i)}{=} 0$ (nach 2). $\qquad \overset{(ri)}{=} 0$ (nach 2).

Nun gilt die Formel für $ee \overset{(i)}{=} 0$ und für $e^{r+1} \overset{(ri)}{=} 0$ (nach 13), alſo allgemein.

15. Es giebt demnach folgende ſechs Arten von Gebinden:

1) Ausgeschiede oder Complexionen ohne Wiederholung, Zeichen $\underline{{}^{(.)}}$.
2) Vollgeschiede oder Complexionen mit Wiederholung, Zeichen $\underline{{}^{(..)}}$.
3) Rgeschiede oder Complexionen mit rfacher Wiederholung, Zeichen $\underline{{}^{(r.)}}$.
4) Ausgeänder oder Variationen ohne Wiederholung, Zeichen $\underline{{}^{(,)}}$.
5) Vollgeänder oder Variationen mit Wiederholung, Zeichen $\underline{{}^{(,,)}}$.
6) Rgeänder oder Variationen mit rfacher Wiederholung, Zeichen $\underline{{}^{(r,)}}$.

Abschnitt 2. Aufstellung der Gebinde.

16. $(S_{1,n}e_a)^m = S\overline{_{1,n}e_a e_b e_c \cdots}$, wo die Anzahl der Faktoren m ist

Die mte Klasse einer Summe von n Stiften oder Elementen erhält man, indem man jedes Stift mit jedem Stifte bindet, jedes erhaltene Gebinde wieder mit jedem Stifte bindet und sofort, bis man lauter Gebinde aus m Stiften hat und demnächst diese Gebinde einander zufügt.

Beweis: Unmittelbar aus No. 2.

17. $(S_{1,n}a_a)^{m+1} = (S_{1,n}a_a)^m (S_{1,n}a_b) = S\overline{_{1,n}(S_{1,n}a_a)}\overline{^m a_b}$.

Die (m+1)te Klasse aus n Grösen erhält man, indem man die mte Klasse aus diesen Grösen mit den sämmtlichen n Grösen bindet oder multiplicirt. Bei Vollgeändern (Variationen m. W.) verschwindet keines dieser Gebinde.

Beweis: Der erste Theil unmittelbar aus No. 2. Bei Vollgeändern wird kein Gebinde Null, da auch die, welche gleiche Faktoren enthalten, nach 13 ungleich Null sind und werden nicht zwei Gebinde gleich, da die Faktoren nach 8 nicht vertauscht werden dürfen, mithin verschwindet auch bei der Zufügung oder Aufstellung kein Gebinde.

18. $(S_{1,n}e_a)^{m+1} \overset{(1)}{=} S\overline{_{1,n}((S_{1,n}e_a)}\overline{-e_b)^m \cdot e_b}$.

Für Ausgebinde (Combinationen o. W.) erhält man die (m+1)te Klasse, aus n Stiften oder Elementen, indem man jede der n Stifte mit der mten Klasse aus den n−1 übrigen Stiften bindet oder multiplicirt. Bei Ausgeändern (Variationen o. W.) verschwindet keines dieser Gebinde.

Beweis: Nach No. 17 ist $(S_{1,n}e_a)^{m+1} = S\overline{_{1,n}(S_{1,n}e_a)}\overline{^m e_b}$. Bei den Ausgebinden werden nun aber nach 13 alle diejenigen Gebinde Null, in denen zwei gleiche Stifte oder Elemente vorkommen und darf man also e_b nur mit denjenigen Gebinden binden, welche e_b nicht enthalten, d. h. nur mit den Gebinden aus den übrigen Stiften.

Da dann in keinem Gebinde gleiche Stifte vorkommen, so wird auch kein Ausgeänder Null und da bei Geändern die Faktoren nach 8 nicht vertauscht werden können, so werden auch nicht zwei

Gebinde gleich, alfo verschwindet auch bei der Addition oder Aufstellung kein Gebinde unter den Ausgeändern.

19. Aufstellung der Gebinde zur zweiten Klasse. Die zweite Klasse aus n Stiften oder Elementen erhält man, indem man jedes Stift bei Ausgeschieden mit jedem folgenden, bei Vollgeschieden mit jedem nicht früheren, bei Ausgeändern mit jedem der übrigen, bei Vollgeändern mit jedem beliebigen Stifte bindet oder multiplicirt.

Beweis: Nach No. 16 ist $(e_1 + e_2 + \cdots + e_n)^2 = S_{1,n} e_a e_b$ für alle Arten der Gebinde.

Bei den Geändern find hier, da nach 9 auch $e_a e_b \gtrless e_b e_a$ ist, alle Gebinde von einander verschieden, und fällt daher bei der Addition oder Aufstellung keines aus. Bei den Vollgeändern behält auserdem auch das Gebinde gleicher Stifte $e_a e_a$ einen Werth ungleich Null und kann man alfo hier jedes Stift mit jedem binden.

Bei den Ausgeändern find die Gebinde gleicher Stifte $e_a e_a = 0$ (nach 13) und muss alfo bei den geltenden Gebinden $b \gtrless a$ fein, d. h. man muss jedes Stift mit jedem der übrigen binden.

Bei den Geschieden kann man nach No. 2 die Gebinde beliebig ordnen und je zwei, welche diefelben Stifte oder Elemente enthalten, $e_a e_b + e_b e_a$ in eine Klammer einschliesen, ferner kann man, da $e_a e_b = e_b e_a$ nach No. 9 ist, beide Geschiede fo ordnen, dass das spätere Stift auch in dem Gebinde das zweite ist, d. h. dass jedes Stift mit einem nicht früheren gebunden ist, dann ist $e_b e_a + e_b e_a = e_b e_a$ (nach No. 4 und No. 2) und wird alfo aus jeder Klammer ein einfaches Gebinde. Alle diefe Geschiede erhält man aber, indem man jedes Stift mit jedem nicht früheren bindet.

Bei den Ausgeschieden find wieder die Gebinde gleicher Stifte $e_a e_a = 0$ (nach 13) und muss alfo bei den geltenden Geschieden $b \gtrless a$ fein, d. h. man muss jedes Stift nur mit jedem folgenden binden.

Beispiel der Gebinde aus 6 Stiften (a, b, c, d, e, f,) zur 2. Klasse.

Vollgeänder.	Ausgeänder.	Vollgeschiede.	Ausgeschiede.
aa ba ca da ea fa	— ba ca da ea fa	aa	—
ab bb cb db eb fb	ab — cb db eb fb	ab bb	ab —
ac bc cc dc ec fc	ac bc — dc ec fc	ac bc cc	ac bc —
ad bd cd dd ed fd	ad bd cd — ed fd	ad bd cd dd	ad bd cd —
ae be ce de ee fe	ae be ce de — fe	ae be ce de ee	ae be ce de —
af bf cf df ef ff	af bf cf df ef —	af bf cf df ef ff	af bf cf df ef —

20. Aufstellung der Gebinde zur höhern Klasse. Aus jeder Klasse von n Stiften oder Elementen leitet man die nächsthöhere Klasse ab, indem man jedes Gebinde der bisherigen Klasse bei Ausgeschieden mit jedem auf das letzte Stift des Gebindes fol-

genden Stifte, bei Vollgeschieden mit jedem nicht früheren Stifte bindet, bei Ausgeändern mit jedem in dem betreffenden Gebinde nicht enthaltenen Stifte, bei Vollgeändern mit jedem beliebigen Stifte bindet.

Beweis: Für Vollgeänder folgt der Satz unmittelbar aus No. 17, für Ausgeänder unmittelbar aus No. 18.

Bei Geschieden kann man nach No. 2 die Gebinde beliebig ordnen und alle Gebinde, welche dieſelben Stifte enthalten, in eine Klammer einschliesen. Ferner kann man in jedem Gebinde nach No. 8 die Stifte beliebig ordnen und ſie alſo ſo ordnen, dass jedes in der ursprünglichen Aufstellung später folgende Stift auch in dem Gebinde später steht als die früheren. Dann ſind alle Gebinde in der Klammer einander gleich und ist die Summe der Gebinde in der Klammer einem einzelnen Gebinde gleich nach No. 6 und kann man alſo ein Gebinde statt der Klammer ſetzen. Alle Geschiede der mten Klasse erhält man alſo, wenn man jedes Geschiede der (m—1)ten Klasse mit jedem nicht frühern Stifte bindet.

Bei Ausgeschieden endlich ist nach No. 13 jedes Gebinde, welches zwei gleiche Stifte enthält, Null, und darf man alſo jedes Geschiede nicht mit einem Stifte des Gebindes, d. h. alſo nur mit den auf das letzte Stift des Gebindes folgenden Stiften binden.

Beispiel der Gebinde aus 6 Stiften a, b, c, d, e, f, zur 3. Klasse

Vollgeänder.

aaa	ada	baa	bda	caa	cda	daa	dda	eaa	eda	faa	fda
aab	adb	bab	bdb	cab	cdb	dab	ddb	eab	edb	fab	fdb
aac	adc	bac	bdc	cac	cdc	dac	ddc	eac	edc	fac	fdc
aad	add	bad	bdd	cad	cdd	dad	ddd	ead	edd	fad	fdd
aae	ade	bae	bde	cae	cde	dae	dde	eae	ede	fae	fde
aaf	adf	baf	bdf	caf	cdf	daf	ddf	eaf	edf	faf	fdf
aba	aea	bba	bea	cba	cca	dba	dea	eba	eea	fba	fea
abb	aeb	bbb	beb	cbb	ceb	dbb	deb	ebb	ecb	fbb	feb
abc	acc	bbc	bec	cbc	cec	dbc	dec	ebc	eec	fbc	fec
abd	aed	bbd	bed	cbd	ced	dbd	ded	ebd	eed	fbd	fed
abe	aee	bbe	bee	cbe	eee	dhe	dee	ebc	eee	fbe	fee
abf	aef	bbf	bef	cbf	cef	dbf	def	ebf	eef	fbf	fef
aca	afa	bca	bfa	cca	cfa	dca	dfa	eca	efa	fca	ffa
acb	afb	bcb	bfb	ccb	cfb	dcb	dfb	ecb	efb	fcb	ffb
acc	afc	bcc	bfc	ccc	cfc	dcc	dfc	ecc	efc	fcc	ffc
acd	afd	bcd	bfd	ccd	cfd	dcd	dfd	ecd	efd	fcd	ffd
ace	afe	bce	bfe	cce	cfe	dce	dfe	ece	efe	fcc	ffe
acf	aff	bcf	bff	ccf	cff	dcf	dff	ecf	eff	fcf	fff

Ausgeänder.						Vollgeschiede.									Ausgeschiede.
abc	bac	cab	dab	eab	fab	aaa	aab	acc		bcc	ccc				abc
abd	bad	cad	dac	eac	fac		aac	acd		bcd	ccd				abd
abe	bae	cae	dae	ead	fad		aad	ace		bce	cce				abe
abf	baf	caf	daf	eaf	fae		aae	acf		bcf	ccf				abf
acb	bca	cba	dba	eba	fba		aaf	add		bdd	cdd	ddd			acd
acd	bcd	cbd	dbc	ebc	fbc		abb	ade	bbb	bde	cde	dde			ace
ace	bce	cbe	dbe	ebd	fbd		abc	adf	bbc	bdf	cdf	ddf			acf
acf	bcf	cbf	dbf	ebf	fbe		abd	aee	bbd	bee	cee	dee	eee		ade
adb	bda	cda	dca	eca	fca		abe	aef	bbe	bef	cef	def	eef		adf
adc	bdc	cdb	dcb	ecb	fcb		abf	aff	bbf	bff	cff	dff	eff	fff	aef
ade	bde	cde	dce	ecd	fcd										
adf	bdf	cdf	dcf	ecf	fce										
aeb	bea	cea	dea	eda	fda										
aec	bec	ceb	deb	edb	fdb										
aed	bed	ced	dec	edc	fdc										
aef	bef	cef	def	edf	fde										
afb	bfa	cfa	dfa	efa	fea										
afc	bfc	cfb	dfb	efb	feb										
afd	bfd	cfd	dfc	efc	fec										
afe	bfe	cfe	dfe	efd	fed										

21. Bei Vollgeändern ist die mte Klasse aus n Stiften oder Elementen gleich der mten Höhe oder Potenz aus n Stiften oder Elementen.

Beweis: Unmittelbar aus 20.

Abschnitt 3.

Die Klassen der Gliederausdrücke oder binomischer und polynomischer Lehrsatz.

A. Für Geschiede.

22. $(a+e)^m \doteq S_{0,m}\overline{a^{m-a}e^a}$

Die mte Geschiedsklasse aus $(n+1)$ Stiften oder Elementen ist gleich der Summe der Geschiede, welche durch Verbindung der $(m-a)$ten Geschiedsklasse aus nStiften mit der aten Geschiedsklasse des $(n+1)$ten Stiftes entstehen.

Beweis: 1) Der Satz gilt für die erste Geschiedsklasse; denn es ist

$$
\begin{aligned}
(a+e)^1 &= a+e && \text{(nach No. 2).}\\
&= a^1e^0 + a^0e^1 && \text{(nach No. 2).}\\
&= S_{0,1}\overline{a^{1-a}e^a}
\end{aligned}
$$

2) Wenn der Satz für die mte Geschiedsklasse gilt, fo gilt er auch für die $(m+1)$te; denn es ist

$$
\begin{aligned}
(a+e)^{m+1} &= (a+e)^m(a+e) && \text{(nach No. 2).}\\
&= (S_{0,m}\overline{a^{m-a}e^a})(a+e) && \text{(nach Annahme).}\\
&= (S_{0,m}\overline{a^{m-a}e^a})\,a + (S_{0,m}\overline{a^{m-a}e^a})e && \text{(nach No. 2).}\\
&= S_{0,m}\overline{a^{m+1-a}e^a} + S_{0,m}\overline{a^{m+1-a+1}e^{a+1}} && \text{(n. No. 2 u. 10).}\\
&= S_{0,m}\overline{a^{m+1-a}e^a} + S_{1,m+1}\overline{a^{m+1-a}e^a}\\
&= a^{m+1}e^0 + S_{1,m}\overline{a^{m+1-a}e^a} + S_{1,m}\overline{a^{m+1-a}e^a} + a^0e^{m+1}\\
&= a^{m+1}e^0 + S_{1,m}\overline{a^{m+1-a}e^a} + a_0e^{m+1} && \text{(nach No 5).}\\
&= S_{0,m+1}\overline{a^{m+1-a}e^a},
\end{aligned}
$$

d. h. der Satz gilt, wenn er für m gilt, auch für $m+1$; nun gilt er für $m=1$, alfo gilt er allgemein.

23. $(a+e)^m \doteq a^m + (a+e)^{m-1}e.$

Die mte Geschiedsklasse aus nStiften oder Elementen ist die mte Geschiedsklasse aus den $n-1$ ersten Stiften plus dem Geschiede des nten Stiftes mit der $m-1$ten Geschiedsklasse aus nStiften.

Beweis: $(a+e)^m = S_{0,m}\overline{a^{m-a}e^a}$ (nach No. 22.)

$$= a^m + S_{1,m}\overline{a^{m-a}e^a}$$

$$= a^m + (S_{1,m}\overline{a^{m-1-(a-1)}e^{a-1}})e \quad \text{(nach No. 2).}$$

$$= a^m + (S_{0,m-1}\overline{a^{m-1-a}e^a})e$$

$$= a^m + (a+e)^{m-1}e \quad \text{(nach No. 22).}$$

24. $$(a+e)^m \overset{(.)}{=} a^m + a^{m-1}e.$$

Bei Ausgeschieden ist die mte Klasse aus nStiften oder Elementen gleich der mten Geschiedsklasse aus den ersten $n-1$ Stiften plus dem Geschiede des nten Stiftes mit der $m-1$ten Klasse aus den $n-1$ ersten Stiften.

Beweis: $(a+e)^m = S_{0,m}\overline{a^{m-a}e^a}$ (nach 22).

$$= a^m + a^{m-1}e^1 + a^{m-2}e^2 + \cdots + e^m$$

$$= a^m + a^{m-1}e \quad \text{(nach 14 u. 2).}$$

25. Zweiglieder-Satz oder binomischer Lehrſatz für Geschiede.

$$(a+b)^m \overset{(.)}{=} S_0\overline{a^a b^b}, \text{ wo } a+b=m.$$

Die mte Geschiedsklasse aus zwei Grösen ist gleich der Summe der Geschiede, welche durch Verbindung der aten Geschiedsklasse der ersten mit der bten Geschiedsklasse der zweiten Gröse entstehen, ſofern $a+b=m$ ist.

Beweis: Angenommen, der Satz gelte für die Gröse b, ſo gilt er auch für die um ein e grösere $b+e$; denn es ist

$$[a+(b+e)]^m = [(a+b)+e]^m \quad \text{(nach No. 2).}$$

$$= S_{0,m}\overline{(a+b)^{m-a}e^a} \quad \text{(nach No. 22).}$$

$$= S_{0,m}(S_{0,m-a}\overline{a^{(m-a)-b}b^b})e^a \quad \text{(nach Annahme).}$$

Hierin ſetze man statt der Grenzen 0 und $m-a$ die Grenzen a und m und demnach statt b auch $b-a$, ſo erhält man

$$= S_{0,m}\overline{a^{m-b}b^{b-a}e^a} \quad \text{(nach No. 2).}$$

$$= S_{0,m}\overline{a^{m-b}(S_{0,b}b^{b-a}e^a)} \quad \text{(nach No. 2)}$$

$$= S_{0,m}\overline{a^{m-b}(b+e)^b} \quad \text{(nach No. 22),}$$

d. h. wenn der Satz für b gilt, ſo gilt er auch für $b+e$; nun gilt er nach No. 22 für $b=e$, mithin gilt er allgemein.

26. Glieder-Satz oder polynomischer Lehrſatz für Geschiede.

$$(a+b+c+\cdots)^m \overset{(.)}{=} S_0\overline{a^a b^b c^c \cdots}, \text{ wo } a+b+c+\cdots=m.$$

Die mte Geschiedsklasse mehrer Grösen ist gleich der Summe der Geschiede, welche durch Verbindung der aten Geschiedsklasse

der ersten Gröse mit der $b$ten Geschiedsklasse der zweiten Gröse, mit der $c$ten Geschiedsklasse der dritten Gröse u. s. w. entstehen, sofern $a+b+c+\cdots=m$ ist.

Beweis: $(a+b+c+\cdots)^m = S_{0,}\overline{a^a(b+c+\cdots)^{m-a}}$ (nach No. 25).

$= S_{0,}\overline{a^a(S_{0,}\overline{b^b(c+\cdots)^{m-(a+b)}})}$ (nach 25).

$= S_{0,}\overline{a^a b^b(c+\cdots)^{m-(a+b)}}$ (nach No. 2).

$= S_{0,}\overline{a^a b^b c^c \cdots}$, wo $a+b+c+\cdots=m$ (nach No. 25).

27. $(e_1+e_2+e_3+\cdots+e_n)^m = S_{0,}\overline{e_1{}^a e_2{}^b e_3{}^c\cdots e_n{}^n}$, wo $a+b+c+\cdots+n=m$.

Die $m$te Geschiedsklasse aus n Stiften oder Elementen ist gleich der Summe der Geschiede, welche durch Verbindung der $a$ten Geschiedsklasse des ersten mit der $b$ten Geschiedsklasse des zweiten, mit der $c$ten Geschiedsklasse des dritten u. s. w. Stiftes entstehen, sofern $a+b+c+\cdots+n=m$ ist.

Beweis: Unmittelbar aus No. 26.

28. $(e_1+e_2+e_3+\cdots+e_n)^n \,\underline{\Omega}\, e_1 e_2 e_3 \cdots e_n$.

Das Ausgeschiede aus n Stiften oder Elementen zur $n$ten Klasse ist das Gebinde der n Stifte.

Beweis: $(e_1+e_2+e_3+\cdots+e_n)^n = S_{0,}\overline{e_1{}^a e_2{}^b e_3{}^c\cdots e_n{}^n}$, wo $a+b+c+\cdots+n=n$ (nach 27).

$= e_1 e_2 e_3 \cdots e_n$

Denn da $a+b+c+\cdots+n=n$ sein soll, so muss jede dieser Zahlen gleich 1 sein. Wäre nämlich eine dieser Zahlen gleich Null, so müsste eine andere gröser als eins sein. Es sei dies c, dann wäre $e_3{}^c \,\underline{\Omega}\, 0$ (nach 14), mithin das entsprechende Gebinde Null (nach 2). Es kann also in der Summe der rechten Seite kein Glied vorkommen, wo eine der Zahlen a, b, $c\cdots$ ungleich Eins wäre, d. h. die rechte Seite besteht nur aus einem Gliede $e_1 e_2 e_3\cdots e_n$.

29. Bei Ausgeschieden ist die $m$te Klasse aus n Stiften oder Elementen Null, wenn m gröser als n ist.

Beweis: $(e_1+e_2+\cdots+e_n)^m = S_{0,}\overline{e_1{}^a e_2{}^b e_3{}^c\cdots e_n{}^n}$ wo $a+b+c+\cdots+n=m$ (nach 27).

Da nun m gröser als n ist, so muss in der Summe $a+b+c+\cdots+n=m$ mindestens eine der n Zahlen a, b, $c\cdots n$ gröser als Eins sein. Es sei dies a, dann ist $e_1{}^a=0$ (nach 14), mithin das entsprechende Gebinde Null (nach 2), mithin die ganze rechte Seite Null.



B. Für Geänder.

30. **Erklärung:** Die Ausgeänder (Variationen o. W.) aus n Stiften oder Elementen zur $n$ten Klasse heisen das Gefolge oder die Permutation aus dem entsprechenden Ausgeschiede.

Sind in einem Geschiede mehre Stifte oder Elemente gleich, fo betrachte man die gleichen Stifte zunächst als ungleich, entwickle die Gefolge, fetze nun die gleichen Stifte einander gleich, schliese die gleichen Gefolge, welche alfo auch die gleiche Ordnung der Stifte haben, in eine Klammer und fetze die Summe derfelben nach No. 6 einem einzelnen diefer Gefolge gleich. Die erhaltene Summe heist dann das Gefolge aus diefem Geschiede.

Das Zeichen des Gefolges ist ein vor das Geschiede gefetztes O.

31. $$(e_1+e_2+\cdots+e_n)^n \stackrel{\omega}{=} O(e_1 e_2 \cdots e_n).$$

Die Ausgeänder (Variationen o. W.) aus n Stiften oder Elementen zur $n$ten Klasse find das Gefolge aus dem entsprechenden Ausgeschiede.

32. $(e_1+e_2+\cdots+e_n)^m \doteq S_{0,}\overline{O(e_1^a e_2^b \cdots e_n^n)}$, wo $a+b+\cdots+n=m$.

Beweis: Für alle Gebinde ist nach No. 16

$(e_1+e_2+\cdots+e_n)^m = S_{1,n}\overline{e_a e_b e_c \cdots}$, wo die Anzahl der Faktoren m ist.

Die Ordnung der Gebinde ist nach No. 2 beliebig, und können wir beliebige in eine Klammer schliesen. Wir ordnen daher alle Gebinde, welche die gleichen Stifte in gleicher Anzahl enthalten zufammen in eine Klammer. Bei Geschieden find alle diefe Gebinde nach No. 10 gleich, und ist die Summe der gleichen Gebinde nach No. 6 gleich einem einzelnen der Gebinde, welches den ganzen Klammerausdruck erfetzt. Bei Geändern dagegen find alle diefe Gebinde, deren Faktoren verschieden geordnet find, nach No. 9 ungleich; die Geänder in der Klammer stellen uns dann vielmehr das Gefolge aus dem entsprechenden Geschiede dar.

Da nun nach 26 für Geschiede $(e_1+e_2+\cdots+e_n)^m = S_{0,}\overline{e_1^a e_2^b \cdots e_n^n}$ ist, wo $a+b+\cdots+n=m$, fo ist auch für Geänder

$$(e_1+e_2+\cdots+e_n)^m = S_{0,}\overline{O(e_1^a e_2^b \cdots e_n^n)}, \text{ wo } a+b+\cdots+n=m.$$

33. **Erklärung.** Unter dem Gefolge $O(a^m b^m \cdots)$ versteht man die Summe, welche man erhält, wenn man fämmtliche Geschiede aus $a^m b^m \cdots$ entwickelt und aus jedem Geschiede das entsprechende Gefolge ableitet.

34. Gliederſatz oder polynomiſcher Lehrſatz für Geänder.

$$(a+b+\cdots)^m \triangleq S_{0,}\overline{O(a^{\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{b}}\cdots)},\ \text{wo}\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\cdots=m.$$

Die mte Geänderklasse mehrer Grösen ist gleich der Summe der Gefolge, aus den Geschieden, welche man erhält, wenn man die erste Gröse in die $\mathfrak{a}$te, die zweite in die $\mathfrak{b}$te, die dritte in die $\mathfrak{c}$te Geschiedsklasse erhebt, wo $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\cdots=m$ ist.

Beweis: Unmittelbar aus No. 33 und 26.

Anhang.

Abschnitt 1. Anwendung der Zahlenlehre auf die Bindelehre oder Anzahl der Gebinde.

35. Bezeichnung. Die Anzahl der Ausgeschiede (Complexionen o. W.), welche ſich aus p Stiften oder Elementen zur mten Klasse ableiten lassen, bezeichnen wir durch $p^{\cdot m}$, geleſen p Punkt m, die Ausgeänder (Variationen o. W.) durch $p^{\prime m}$, geleſen p Schlag m, und entsprechend die Vollgeschiede (Complexionen m. W.) durch $p^{\cdot\cdot m}$ und die Vollgeänder (Variationen m. W.) durch $p^{\prime\prime m}$.

Die Anzahl der Gefolge ans einem Geschiede von p Stiften bezeichnen wir durch $p!$.

36. $$p^{\prime\prime m} = p^m$$

Die Anzahl der Vollgeänder aus p Stiften zur mten Klasse ist gleich der Höhe p^m oder die Anzahl der Variationen m. W. aus p Elementen zur mten Klasse ist gleich der Potenz p^m

Beweis: Nach 17 ist $(\overline{S_{1,p}a_a})^m = (\overline{S_{1,p}a_a})^{m-1}\,(\overline{S_{1,p}a_b})$, wo für Vollgeänder kein Gebinde verschwindet, mithin ist

$$p^{\prime\prime m} = p^{\prime\prime m-1}\cdot p = p^{\prime\prime m-2}\cdot p^2 = p^{\prime\prime m-m}\cdot p^m$$
$$= p^m \qquad \text{(nach No. 2, 5).}$$

37. $$p^{\prime m} = p(p-1)(p-2)\cdots(p-m+1).$$

Die Anzahl der Ausgeänder (Variationen o. W.) aus p Stiften oder Elementen zur mten Klasse ist gleich dem Zeuge oder Producte aus m Zahlen, von denen die erste p, jede folgende um 1 kleiner als die nächstvorhergehende ist.

Beweis: Nach No. 18 ist $(S_{1,p}e_a)^m = S_{1,p}(\overline{(S_{1,p}e_a) - e_b})^{m-1}\cdot e_b$, wo für Ausgeänder kein Gebinde verschwindet, mithin ist

$$p^{\prime m} = p\cdot(p-1)^{\prime m-1}$$
$$= p\,(p-1)\cdot(p-2)^{\prime m-2}$$
$$= p\cdot(p-1)\cdots(p-m+1)(p-m)^{\prime m-m}$$
$$= p\cdot(p-1)\cdots(p-m+1) \qquad \text{(nach No. 2, 5)}$$

38. $$p! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots p \qquad 0! = 1.$$

Die Anzahl der Gefolge (Permutationen) aus p verschiedenen Stiften oder Elementen ist gleich dem Zeuge oder Producte der p ersten ganzen Zahlen. Die Anzahl der Gefolge aus 0 Stiften ist 1.

Beweis: 1) Nach No. 32 ist $O(e_1 e_2 \cdots e_p) \stackrel{(o)}{=} (e_1 + e_2 + \cdots + e_p)^p$, mithin ist

$$p! = p^{\cdot p} = p(p-1)(p-2)\cdots(p-p+1) \quad \text{(nach No. 37).}$$
$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p.$$

2) $0! = 0^{\cdot 0} = 1$ (nach No. 32 u. 12).

39. $$p^{\cdot m} = \frac{p!}{(p-m)!}$$

Die Anzahl der Ausgeänder (Variationen o. W.) aus p Stiften zur mten Klasse ist gleich der Zahl der Gefolge aus p Stiften, getheilt durch die Zahl der Gefolge aus p m Stiften.

Beweis: $p^{\cdot m} = p(p-1)(p-2)\cdots(p-m+1)$ (nach 37).

$$= \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-m+1)(p-m)\cdots 2\cdot 1}{(p-m)\cdots 2\cdot 1}$$

(nach Zahlenlehre 49).

$$= \frac{p!}{(p-m)!} \quad \text{(nach 38).}$$

40. $$p^{\cdot m} = p(p-1)^{\cdot m-1} = \frac{p}{p-m}(p-1)^{\cdot m} = (p-1)^{\cdot m} + m(p-1)^{\cdot m-1}$$

Beweis: 1) $p^{\cdot m} = p(p-1)^{\cdot m-1}$ unmittelbar nach dem Beweise zu No. 37.

2) $$p^{\cdot m} = \frac{p!}{(p-m)!} = \frac{p(p-1)!}{(p-m)(p-m-1)!} = \frac{p}{p-m}\cdot(p-1)^{\cdot m} \text{(nach 39).}$$

3) $$p^{\cdot m} = \frac{p(p-1)!}{(p-m)(p-m-1)!} = \frac{(p-m)(p-1)!}{(p-m)(p-m-1)!} + \frac{m(p-1)!}{(p-m)(p-m-1)!}$$
$$= \frac{(p-1)!}{(p-m-1)!} + \frac{m(p-1)!}{(p-m)!} = (p-1)^{\cdot m} + m(p-1)^{\cdot m-1}.$$

41. $$p^{\cdot m} = m!\, p^{m}.$$

Die Anzahl der Ausgeänder (Variationen o. W.) aus p Stiften zur mten Klasse ist gleich der Anzahl der Gefolge aus m Stiften mal der Anzahl der Ausgeschiede aus p Stiften zur mten Klasse.

Beweis: Nach No. 27 ist für Geschiede $(e_1 + e_2 + \cdots + e_n)^m \doteq S_0\, \overline{e_1{}^a e_2{}^b e_3{}^c \cdots e_n{}^n}$, wo $a + b + \cdots + n = m$, ferner ist nach No. 32 für Geänder $(e_1 + e_2 + \cdots + e_n)^m \doteq S_0\, \overline{O(e_1{}^a e_2{}^b e_3{}^c \cdots e_n{}^n)}$, wo $a + b + \cdots + n = m$. Man erhält alfo die Geänder, wenn man aus jedem Geschiede die entsprechenden Gefolge ableitet. Bei Ausgebinden find ferner in jedem Gebinde alle m Stifte verschieden, die Zahl der Gefolge aus dem entsprechenden Ausgeschiede ist alfo m! und ist demnach $p^{\cdot m} = m!\, p^{m}$.

42. $$p^{m} = \frac{p^{\cdot m}}{m!} = \frac{p!}{m!(p-m)!}.$$

Die Anzahl der Ausgeschiede (Complexionen o. W.) aus p Stiften zur mten Klasse ist gleich der Anzahl der Ausgeänder aus p Stiften zur mten Klasse getheilt durch die Anzahl der Gefolge aus m Stiften oder sie ist gleich der Anzahl der Gefolge aus p Stiften getheilt durch das Zeug oder Product der Anzahl der Gefolge aus m Stiften mit der Anzahl der Gefolge aus (p—m) Stiften.

Beweis: Unmittelbar aus No. 41 und No. 39.

43. $$p^{\cdot m} = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}$$

Die Anzahl der Ausgeschiede (Complexionen o. W.) aus p Stiften zur mten Klasse ist gleich einem Bruche, dessen Zähler ein Zeug (Product) ist aus m Zahlen, von denen die erste p und jede folgende um 1 kleiner ist als die nächstvorhergehende und dessen Nenner das Zeug ist der m ersten ganzen Zahlen.

Beweis: Unmittelbar aus No. 42, aus No. 37 und 38.

44. $$p^{\cdot m} = p^{\cdot p-m}.$$

Die Anzahl der Ausgeschiede (Complexionen o. W.) aus p Stiften zur mten Klasse ist gleich der Anzahl der Ausgeschiede aus p Stiften zur (p—m)ten Klasse.

Beweis: $p^{\cdot m} = \frac{p!}{m!(p-m)!} = p^{\cdot p-m}$ (nach No. 42).

45. $$p^{\cdot m} = \frac{p}{m}(p-1)^{\cdot m-1} = \frac{p}{p-m}(p-1)^{\cdot m} = (p-1)^{\cdot m} + (p-1)^{\cdot m-1}$$

Beweis: 1) $p^{\cdot m} = \frac{p!}{m!(p-m)!} = \frac{p(p-1)!}{m(m-1)!(p-1-(m-1))!} = \frac{p}{m}(p-1)^{\cdot m-1}$ (nach No. 42).

2) $p^{\cdot m} = \frac{p!}{(p-m)!\,m!} = \frac{p(p-1)!}{(p-m)(p-1-m)!\,m!} = \frac{p}{p-m}(p-1)^{\cdot m}$ (n. 42).

3) $p^{\cdot m} = (p-1)^{\cdot m} + (p-1)^{\cdot m-1}$ (unmittelbar nach No. 24).

46. $$(p+m)^{\cdot m+1} = S_{1,p}\overline{(a+m-1)}^{\cdot m}.$$

Die Anzahl der Ausgeschiede (Complexionen o. W.) aus p+m Stiften zur (m+1)ten Klasse ist gleich der Summe der Anzahl der Ausgeschiede aus (a+m—1) Stiften zur mten Klasse, wo a von 1 bis p genommen wird.

Beweis: $(p+m)^{\cdot m+1} = (p+m-1)^{\cdot m} + (p+m-1)^{\cdot m+1}$ (nach 45).

$= (p+m-1)^{\cdot m} + (p+m-2)^{\cdot m} + (p+m-2)^{\cdot m+1}$ (nach No. 45).

$= (p+m-1)^{\cdot m} + (p+m-2)^{\cdot m} + \cdots + m^{\cdot m} + m^{\cdot m+1}$ (nach No. 45).

$= (p+m-1)^{\cdot m} + (p+m-2)^{\cdot m} + \cdots + m^{\cdot m}$ (n. 29)

$= S_{1,p}\overline{(a+m-1)}^{\cdot m}$

47. $$p^{\cdot\cdot m+1} = p^{\cdot\cdot m} + (p-1)^{\cdot\cdot m+1} = S_{1,p}\overline{a^{\cdot\cdot m}}$$

Die Anzahl der Vollgeschiede (Complexionen m. W.) aus p Stiften zur (m+1)ten Klasse ist gleich der Anzahl der Vollgeschiede aus p Stiften zur mten Klasse plus der Anzahl der Vollgeschiede aus (p−1) Stiften zur (m+1)ten Klasse oder ſie ist gleich der Summe der Anzahl der Vollgeschiede aus a Stiften zur mten Klasse, wo a von 1 bis p genommen wird.

Beweis: Nach 23 ist für Geschiede $(a+e)^m \doteq (a+e)^{m-1}e + a^m$. Hier wird bei Vollgeschieden kein Gebinde Null und folgt alſo unmittelbar $p^{\cdot\cdot m+1} = p^{\cdot\cdot m} + (p-1)^{\cdot\cdot m+1}$. Hieraus aber ergiebt ſich weiter

$$p^{\cdot\cdot m+1} = p^{\cdot\cdot m} + (p-1)^{\cdot\cdot m} + (p-2)^{\cdot\cdot m+1} = p^{\cdot\cdot m} + (p-1)^{\cdot\cdot m} + \cdots + 1^{\cdot\cdot m} + 0^{\cdot\cdot m+1}$$
$$= p^{\cdot\cdot m} + (p-1)^{\cdot\cdot m} + \cdots + 1^{\cdot\cdot m} \text{ (n. 12).}$$
$$= S_{1,p}\overline{a^{\cdot\cdot m}}$$

48. $$p^{\cdot\cdot m} = (p+m-1)^{\cdot m}$$

Die Anzahl der Vollgeschiede (Complexionen m. W.) aus p Stiften zur mten Klasse ist gleich der Anzahl der Ausgeschiede (Complexionen o. W.) aus (p+m−1) Stiften zur mten Klasse.

Beweis: 1) Der Satz gilt für $m=1$; denn $p^{\cdot\cdot 1} = p = (p+1-1)^{\cdot 1}$ (nach No. 2).

2) Wenn der Satz für einen Werth m gilt, ſo gilt er auch für den nächsthöhern Werth $m+1$; denn

$$p^{\cdot\cdot m+1} = S_{1,p}\overline{a^{\cdot\cdot m}} \quad \text{(nach No. 47).}$$
$$= S_{1,p}\overline{(a+m-1)^{\cdot m}} \quad \text{(nach Annahme)}$$
$$= (p+m-1)^{\cdot m+1} \quad \text{(nach No. 46),}$$

alſo gilt der Satz, da er für $m=1$ gilt, auch allgemein.

49. $$p^{\cdot\cdot m} = \frac{(p+m-1)!}{m!(p-1)!} = (m+1)^{\cdot\cdot p-1}$$

Die Anzahl der Vollgeschiede (Complexionen m. W.) aus p Stiften zur mten Klasse ist gleich der Anzahl der Gefolge aus (p+m−1) Stiften getheilt durch das Zeug (Product) der Anzahl der Gefolge aus m Stiften mit der Anzahl der Gefolge aus (p−1) Stiften oder ſie ist gleich den Vollgeschieden aus (m+1) Stiften zur (p−1)ten Klasse.

Beweis: $$p^{\cdot\cdot m} = (p+m-1)^{\cdot m} \quad \text{(nach No. 48).}$$
$$= \frac{(p+m-1)!}{m!(p-1)!} \quad \text{(nach No. 42).}$$
$$= (m+1)^{\cdot\cdot p-1} \quad \text{(nach No. 49, 1).}$$

50. $$p^{\cdot m} = (m+1)^{\cdot\cdot p-m}$$

Die Anzahl der Ausgeschiede aus p Stiften zur mten Klasse

ist gleich der Anzahl der Vollgeschiede aus $(m+1)$ Stiften zur $(p-m)$ten Klasse.

Beweis: $(m+1)^{\cdot\cdot p-m} = (m+1+p-m-1)^{\cdot p-m}$ (nach No. 48).
$= p^{\cdot p-m} = p^{\cdot m}$ (nach No. 44).

51. $$p^{\cdot\cdot m} = \frac{p(p+1)\cdots(p+m-1)}{1\cdot 2\cdots m}$$

Die Anzahl der Vollgeschiede (Complexionen m. W.) aus p Stiften zur $m$ten Klasse ist gleich einem Bruche, dessen Zähler das Zeug (Product) ist aus m Zahlen, von denen die erste p und jede folgende um 1 gröser ist als die nächstvorhergehende und deren Nenner das Zeug ist aus den m ersten ganzen Zahlen.

Beweis: Unmittelbar aus No. 48 und No. 43.

52. $$(a+b+\cdots)^{\cdot m} = S_0 \overline{a^{\cdot\mathfrak{a}} b^{\cdot\mathfrak{b}} c^{\cdot\mathfrak{c}}\cdots}, \text{ wo } \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\cdots = m.$$
$$(a+b+\cdots)^{\cdot\cdot m} = S_0 \overline{a^{\cdot\cdot\mathfrak{a}} b^{\cdot\cdot\mathfrak{b}} c^{\cdot\cdot\mathfrak{c}}\cdots}, \text{ wo } \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\cdots = m,$$
wo $a, b \cdots$ lauter verschiedene Stifte oder Elemente enthalten.

Beweis: Unmittelbar aus No. 26, da $a, b \cdots$ lauter verschiedene Stifte enthalten.

53 $$(a+b+\cdots)^{\cdot m} = \mathbf{S}_{0,}\, \overline{\frac{m!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!\cdots}\, a^{\cdot\mathfrak{a}} b^{\cdot\mathfrak{b}}\cdots}, \text{ wo } \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\cdots = m,$$
$$(a+b+\cdots)^{\cdot\cdot m} = \mathbf{S}_{0,}\, \overline{\frac{m!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!\cdots}\, a^{\cdot\cdot\mathfrak{a}} b^{\cdot\cdot\mathfrak{b}}\cdots}, \text{ wo } \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\cdots = m,$$
und wo $a, b \cdots$ lauter verschiedene Stifte enthalten.

Beweis: Nach No. 34 ist für Geänder $(a+b+\cdots)^m = S\overline{O(a^{\mathfrak{a}} b^{\mathfrak{b}} c^{\mathfrak{c}}\cdots)}$, wo $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\cdots = m$ und wo $a^{\mathfrak{a}}, b^{\mathfrak{b}}, c^{\mathfrak{c}}\cdots$ die Geschiede aus den Stiften der Grösen $a, b, c \cdots$ zu den entsprechenden Klassen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \cdots$ bezeichnen.

1) Bei den Ausgeändern sind nun alle m Elemente jedes Geschiedes $a^{\mathfrak{a}} b^{\mathfrak{b}} c^{\mathfrak{c}}\cdots$ von einander verschieden, also ist auch
$(a+b+\cdots)^{\cdot m} = m!(a+b+\cdots)^{\cdot m}$ (nach No. 41).
$= S_0 \overline{m!(a^{\cdot\mathfrak{a}} b^{\cdot\mathfrak{b}} c^{\cdot\mathfrak{c}}\cdots)}$, wo $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\cdots = m$ (nach No. 52).
$= \mathbf{S}_{0,}\, \overline{\frac{m!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!\,\mathfrak{c}!\cdots}\, a^{\cdot\mathfrak{a}} b^{\cdot\mathfrak{b}} c^{\cdot\mathfrak{c}}\cdots}$, wo $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\cdots = m$ (nach No. 42)

2) Die Vollgeänder erhalten wir hieraus, wenn wir statt der Klassen der Ausgeänder die entsprechenden der Vollgeänder nehmen; denn nach wie vor bleiben die Stifte in $a, b \cdots$ verschieden und treten nur in den Klassen $a^{\mathfrak{a}}, b^{\mathfrak{b}} \cdots$ statt der Ausgeänder die Vollgeänder ein. Es ist mithin

$$(a+b+\cdots)^{\cdot\cdot m} = \mathbf{S}_{0,}\, \overline{\frac{m!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!\,\mathfrak{c}!\cdots}\, a^{\cdot\cdot\mathfrak{a}} b^{\cdot\cdot\mathfrak{b}} c^{\cdot\cdot\mathfrak{c}}\cdots}, \text{ wo } \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\cdots = m.$$



Einleitung

in die

Zahlenlehre oder Arithmetik.

Die Zahlenlehre[1]) oder Arithmetik ist zuerst von den egyptischen Priestern und von den babylonischen Weiſen behandelt. Das Rechnen bildete in Egypten bereits um 2000 Jahre vor Chr. einen Theil des Volksunterrichts und ward mit Marken geübt. In Babylon war die Rechenkunst bereits um 1000 vor Chr weit vorgeschritten und auf die Sternlehre fruchtbringend angewandt. Die Weiſen Griechenlands, Thalês um 639—549 v. Chr. und Pherekýdēs erlernten dieſe Zahlenlehre in Egypten. Pythagóras um 569—471 v. Chr. bildete ſich zunächst in Egypten, dann in Babylon aus. Seine Zahlenlehre ist babylonischen Ursprunges. Durch dieſe Männer ward die Zahlenlehre nach Griechenland verpflanzt. Der erste, der demnächst die Zahlenlehre wissenschaftlich behandelt hat, wenn auch nur als Hülfswissenschaft der Geometrie, ist Eucleídēs, geboren 308 vor Chr. Die Zahlenlehre bildet bei ihm das siebente bis zehnte Buch ſeiner stoicheîa. Nach ihm hat Archimédēs 287—212 vor Chr. im psammítēs und Dióphantos im vierten Jahrhundert nach Chr. in ſeinen 13 Büchern der arithmētikḗ dieſe Wissenschaft weiter ausgebildet. Die Zahlenlehre ist durch dieſe Männer bis zu der Multiplication und Diviſion, bis zu den Brüchen und der Irrationalzahl geführt, dagegen ist die Potenzlehre und das Zahlenſystem noch nicht entwickelt. Das Rechnen geschah auf Rechenbrettern (ábax). Auf ſenkrechter Linie wurden Marken verschoben und bezeichneten die Grösse der Zahl von 1 bis 9. Jede Einheit der links stehenden Linie galt 10 mal ſoviel als die der rechts stehenden, die letzte rechte zählte Brüche. Die Null kannte man noch nicht.

Die weitere Ausbildung hat die Zahlenlehre zunächst in Indien erfahren. Hier schrieb zuerst Arya-Bhatta um 500 nach Chr. über Algebra und ſoll die unbestimmten Gleichungen erfunden haben. Hier schrieb Brahmegypta um 650 nach Chr. ein astronomisches Werk, Brahmasiddhanta, dessen 12. und 18. Kapitel ſich beſonders mit Zahlenlehre und Algebra beschäftigen. Endlich schrieb hier Bhascara-Acharya um 1150 nach Chr. ein Werk, Siddhanta-

[1]) Zahl stammt vom Urverb dal, sskr. dar, griech. den-dſl-lō, lit. dyr-an, goth. tilan, tal passen, geschickt ſein. Davon heist an. telja, ahd. zeljan, nhd. zählen. passend machen, anordnen. Die Zahl ist alſo das Passende, das Geordnete.

siromani, dessen Einleitungskapitel ſich mit zahlentheoretischen Unterſuchungen beschäftigen, wie wir ſie erst im 18. Jahrhundert erreicht haben. Dieſe Inder ſind die Erfinder unſers zehntheiligen Zahlensystems, namentlich der Null und der Rechenkunst in dieſem Systeme.

Von Griechen und Indern haben die Araber die Zahlenlehre erlernt. Es waren die edlen Kalifen Bagdads, welche von 700 nach Chr. ab Wissenschaft und Kunst pflegten und Bagdad in jener Zeit zu dem Mittelpunkte der Wissenschaft machten, namentlich glänzte unter ihnen Al-Mamun 813 bis 833 nach Chr. Die griechischen Philoſophen und Mathematiker wurden ins Arabische überſetzt, ſo Aristotélēs, Eukleídēs, Archimēdēs, Apollōnios, Ptolemaíos, die indische Rechenkunst und Sternlehre ward weiter gebildet. Muhammed ben Musa aus Kharizm, daher auch Alkharezmi genannt, verfasste auf Geheis des Al-Mamun eine Algebra und eine Arithmetik. Der Name Algebra ist zuerst von ihm eingeführt und heist ursprünglich Aljebr wa'lmukā balah, d. h. Herstellung und Vergleichung, ebenſo stammt das Wort Algorithmus aus ſeinem Beinamen Alkharezmi. Sein Arithmetik ist in lateinischer Ueberſetzung als Algoritmi de numero Indorum in den trattati d'aritmetica publica da Baldassare Buncampagni Roma 1857 herausgegeben und behandelt ausführlich die Rechenkunst mit Ziffern, namentlich auch die Diviſion nach heutiger Sitte und die Neunerprobe. Nach ihm hat Abyl-Ryhan Mohammed aus Byrun mit dem Beinamen Albyruni 1031 eine Schrift über Indien und eine Arithmetik geschrieben.

Von den Arabern ward demnächst die Zahlenlehre nach Spanien verpflanzt. Von hier hat Gerbert, nachheriger Papst Sylvester II. beides um 1000 nach Chr. nach Italien und dem übrigen Europa gebracht. Erst zur Zeit der Reformation haben aber die zehntheiligen Zahlzeichen unter dem Volke als arabische Ziffern allgemeine Verbreitung gefunden.

Nach der Reformation führte Franz Vieta aus Fontenay in dem Werke „Canon arithmeticus“ 1579 die Buchstaben als allgemeine Zahlzeichen und den Coefficienten, Simon Stevin aus Brügge in ſeinem Werke „La pratique de l'arithmétique“ 1585 den Exponenten der Potenz, John Napier in ſeinem Werke „Mirifici logarithmorum canonis descriptio“ 1614 die Logarithmen ein. Seit jener Zeit haben die Mathematiker ihre Kräfte vorzüglich den höhern Zweigen der Mathematik zugewandt, und wenn auch Arbeiten, wie Newton arithmetica universalis 1707, Euler introductio in analysin infinitorum 1748 und Gauss disquisitiones arithmeticae 1801 nicht ohne Einfluss auf die Zahlenlehre blieben, ſo hat es doch keiner der grösern Mathematiker neuerer Zeit der Mühe werth gehalten, ſeine Kräfte der Zahlenlehre zu widmen und wissenschaftliche Schärfe in dieſen Zweig der Mathematik einzuführen.

Auch für die Zahlenlehre bedurfte es daher eines neuen Weges, wenn dieſelbe in ihrer wissenschaftlichen Schärfe und ihrer elementaren Einfachheit und Leichtigkeit hervortreten ſollte. Es musste die gewöhnliche Sitte verlassen werden, an Stelle des Beweiſes einige Redensarten zu ſetzen, welche die Sache wahrscheinlich machen, und musste an Stelle derſelben eine strenge Methode der Formelentwicklung eingeführt werden. Auch hier zeigt ſich dann wieder, dass die streng wissenschaftliche Form viel kürzer, leichter und elementarer ist als das unwissenschaftliche Gerede, welches dieſelbe erſetzen ſoll.

Auch für die Zahlenlehre gelten alle Geſetze der Zufügung, Verwebung

und Erhöhung oder der Addition, Multiplication und Potenzirung, welche in der Grösenlehre ausführlich bewiesen sind, und hat jede Gröse, wie jede Verknüpfung nur einen und nicht mehre Werthe. Will man die Gesetze des Zufügens (Addirens), des Verwebens (Multiplicirens), das hier Vervielfachen genannt wird, und des Erhöhens (Potenzirens) streng wissenschaftlich aus den möglichst einfachen Voraussetzungen ableiten, so muss man die ganze Grösenlehre vor der Zahlenlehre durchnehmen. Will man dies nicht, so ist es allein wissenschaftlich, die einfachen Gesetze dieser Rechnungsarten, wie sie in No. 2 aufgeführt sind, als Grundsätze anzuführen; nicht aber sie durch Trugschlüsse scheinbar zu beweisen, wie dies in fast allen Lehrbüchern der Zahlenlehre geschieht.

Eigenthümlich ist der Zahlenlehre, dass nur zwei Arten der Einheiten oder Elemente zugefügt werden, $+e$ und $-e$, dass die Summe dieser beiden Einheiten Null ist, und dass jede durch fortschreitendes Zufügen derselben Einheit erzeugte Zahlgröse von allen vorhergehenden verschieden ist. Im Uebrigen kann aber die Einheit wieder jedes bezeichnen, was Gegenstand des Denkens ist oder werden kann, und können die aus der Einheit abgeleiteten Zahlgrösen ebenso gut benannte wie unbenannte Zahlen sein. Dagegen werden die Zahlgrösen in der Zahlenlehre nur mit einer Einheit, der Eins, vervielfacht und erhöht.

Was die Entwicklung betrifft, so dürfen für die Zahlenlehre die Gesetze des Zufügens (Addition), der Vervielfachung (Multiplication) und der Erhöhung (Potenzirung) nicht nochmals abgeleitet werden, sondern werden aus der Grösenlehre bereits vorausgesetzt. Eigenthümlich ist der Zahlenlehre in dem ersten Zählgrade das Abziehen oder Subtrahiren und die negative Zahlgröse oder Strichgröse, sowie die Vergleichung der Zahlgrösen in Bezug auf Wachsen und Abnehmen. Die Darstellung ist aber unter der Voraussetzung der Gesetze des Zufügens einfach, leicht und kurz und lässt alle Sätze unmittelbar aus dem Begriffe hervortreten. Für das Abziehen oder Subtrahiren musste, da jede Verknüpfung in der Zahlenlehre nur einen Werth besitzen darf, zuerst bewiesen werden, dass je zwei Zahlgrösen, welche zu derselben Zahlgröse zugefügt oder addirt, gleiche Summe liefern, einander gleich sind. In dem zweiten Zählgrade ist der Zahlenlehre das Theilen oder Dividiren eigenthümlich in seinen beiden Unterarten, dem Messen (metrein) und dem Zertheilen (metrizein), ebenso der Bruch, die Behandlung der Vorzeichen (+ und —) beim Vervielfachen und Theilen. Auch hier darf das Theilen oder Dividiren erst eintreten, nachdem bewiesen ist, dass je zwei Zahlgrösen, welche mit derselben Zahlgröse ungleich Null vervielfacht, dasselbe Zeug oder Product geben, einander gleich sind; denn nur, wenn dieses Statt findet, besitzt die Verknüpfung wieder nur einen Werth. Bei Null findet dies nicht Statt, und darf daher durch Null nicht dividirt werden; so ist z. B. $5\cdot 0 = 10\cdot 0$, dürfte man nun durch Null dividiren, so erhielten wir $\frac{5\cdot 0}{0} = \frac{10\cdot 0}{0}$, d. h. wenn wir $\frac{0}{0}$ heben, $5 = 10$. Der Gang der Darstellung ist wieder trotz aller Strenge der Wissenschaft überraschend einfach, leicht und kurz; nirgends darf dasselbe zweimal bewiesen werden, wie dies in andern Darstellungen häufig geschieht. Die Betrachtungen der Eigenschaften der Zahlen, das Aufgehen der Zahlen, das **Gemeinmass**, die **Primzahlen** und die Zerlegung der zusammengesetzten Zahlen in Prim-

zahlen oder Primfactoren geben ebenſo wie die Eigenſchaften der **Brüche** oder die Lehre von den Proportionen dem zweiten Zählgrade ſeine reiche, der Zahlenlehre ausschliesslich angehörende Fülle.

In dem dritten Zählgrade erscheinen in der Zahlenlehre zwei neue Rechnungsarten, das Radiciren und das Logarithmiren. Beide dürfen erst eintreten, nachdem bewieſen ist, dass je zwei poſitive Zahlen, welche zu derſelben ganzen Zahl ungleich Null erhöht, dieſelbe Höhe oder Potenz geben, einander gleich ſind, und dass ebenſo je zwei ganze Zahlen, zu welchen dieſelbe poſitive Zahl ungleich Eins erhöht, dieſelbe Höhe oder Potenz geben, einander gleich ſind; denn ſonst könnte das Ergebniss der neuen Rechnungsarten mehre Werthe zulassen und müsste mithin zu gefährlichen Trugschlüssen führen. In der gewöhnlichen Arithmetik rechnet man aber wie mit $\frac{1}{0}$, ſo auch mit mehren Wurzeln und ſetzt die nten Wurzeln gleicher Radicanden im Allgemeinen einander gleich, ohne zu bestimmen, welche Wurzel gemeint ſei. In jedem einzelnen Falle unterſucht man dann, ob die Wurzeln einander gleich ſind oder nicht; dies ist unwissenschaftlich und muss vermieden werden. In der Zahlenlehre giebt es für jeden poſitiven Radicand nur Eine poſitive Wurzel, welche ich, um ſie von den mehren Wurzeln derſelben Gröse zu unterscheiden, die **Tiefe** genannt habe.

Die Vergleichung der Höhen (Potenz), der **Tiefen** (Radix) und der Logarithmen und die Eigenſchaften derſelben führen uns zur Betrachtung einer neuen Zahlgröse, der Irrationalzahl. Die Gliederausdrücke oder Polynome mit Höhen oder Potenzen führen uns zur Betrachtung der Potenzreihen und zu der wichtigsten Art derſelben, zur Systemzahl. Das zehntheilige Zahlenſystem mit den Decimalbrüchen lehrt uns das wichtigste Beispiel derſelben kennen und führt uns in die Rechnungsgeſetze des gewöhnlichen Lebens ein. Die Lehre von den Gleichungen bildet den Schluss der Zahlenlehre. Die unendlichen Reihen gehören den höheren Zweigen der Formenlehre an. Der binomische und polynomische Lehrſatz bildet eine Anwendung der Bindelehre, die imaginäre Gröse eine Anwendung der Ausenlehre auf die Zahlenlehre. Für die Entstehung der Zahlnamen und der Zahlzeichen verweiſe ich auf die Sprachlehre.

Es bleibt noch übrig, einige Worte über die neu eingeführten deutschen Kunstausdrücke zu ſagen. Wie bei jeder Wissenschaft, ſo habe ich auch hier verſucht, alle Kunstausdrücke rein deutsch zu bilden, um dadurch die Wissenschaft unſerm Volke zugänglich zu machen und der Wissenschaft ſelbst die Frische und Schärfe zu gewinnen, welche allein möglich ist, wenn jedes Wort allen Wandlungen des Begriffes folgen kann. In dem ersten Zahlgrade heisen die Zeichen + und — plus und minus; ich nenne das zweite nach ſeiner Geſtalt einen **Strich**. Die Elemente der Zahlenlehre heisen bereits allgemein **Einheiten**, die Elementargrösen heisen **Zahlgrösen**, die mit dem Pluszeichen heisen dann poſitive, die mit dem Strichzeichen negative, ich nenne die erstern **Pluseinheiten** und **Plusgrösen**, die letztern **Stricheinheiten** und **Strichgrösen**. Das Addiren heist bereits allgemein **Zufügen**, die gegebenen Grösen heisen **Stücke**, das Ergebniss **Summe**. Das Subtrahiren heist ebenſo allgemein **Abziehen**, der Minnendus der **Vorrath**, der Subtrahendus der **Abzug**, das Ergebniss der **Unterschied** oder der **Rest**. Alle dieſe Ausdrücke behalte ich bei.

In dem zweiten Zählgrade haben die Zeichen · und : bereits deutsche Namen „mal“ und „durch“, die mit dieſen Zeichen verſehenen Klammern nenne ich Malklammer und Theilklammer. Das Multipliciren heist bereits Vervielfachen, die gegebenen Grösen heisen Factoren, das Ergebniss heist Product. Wie in der Grösenlehre nenne ich den Factor das Fach, das Product das Zeug. Das Dividiren heist bereits allgemein Theilen, der Dividendus Zähler, der Diviſor Nenner, das Ergebniss ein Bruch. Dieſe Namen behalte ich bei und wende ſie allgemein für jede Diviſionsaufgabe an. Den Coefficienten eines Gliedes nenne ich die Vorzahl des Gliedes. Die Namen Primzahl, Primfactor oder Primfach behalte ich bei, die Proportion nenne ich nach ihrem Weſen eine Bruchgleichung.

In dem dritten Zählgrade heist das Potenziren bereits allgemein Erhöhen, die Baſis die Baſe, der Exponent die Stufe (z. B. a^3 geleſen a zur dritten Stufe), die Potenz die Höhe. Dieſe Namen behalte ich bei. Schwieriger ist die Sache beim Radiciren und Logarithmiren. Beim Radiciren nennt man das Ergebniss die Radix oder Wurzel. Dieſen Ausdruck könnte man beibehalten, wenn er einwerthig wäre; aber da es für jede Gröse n nte Wurzeln giebt, ſo hat die Wurzel ſelbst einen mehrdeutigen Werth und ist daher nicht mehr im Sinne der Formenlehre eine Gröse zu nennen. Jede poſitive Gröse hat aber nur eine poſitive Wurzel, dieſe poſitive Wurzel nenne ich im Gegenſatze zur Höhe die Tiefe, das Radiciren Tiefen, den Radicand die Tiefzahl, den Radicator die Senke. Beim Logarithmiren nenne ich den Logarithmus, da es ſich von ſelbst versteht, dass er eine Zahl ist, kurz einen Log[2]), zumal in allen Werken der Logarithmus bereits bis auf das Zeichen log. abgekürzt wird. Das Logarithmiren nenne ich Logen, den numerus logarithmi die Logzahl, die basis logarithmi die Logbaſe.

Für Schulen, welche die Grösenlehre und Begriffslehre vor der Zahlenlehre nicht durchnehmen können oder wollen, ist es das Wissenschaftlichste, wenn ſie die Erklärungen und Geſetze der Grösenlehre, wie ſie hier im ersten Abschnitte aufgestellt ſind, einfach aus der Anschauung ableiten, welche beim Rechnen gewonnen ist, und ſie als Grundſätze voranschicken. Rechenhefte, welche ſich an dieſe Zahlenlehre anschliesen, und welche den Bedürfnissen des ersten Rechenunterrichtes entsprechen, ſind geſondert erschienen. Die Aufgabenhefte enthalten zugleich die kurzen Regeln des Rechnens; die Auflöſungshefte, welche in den Händen des Lehrers ſein ſollen, geben die Anleitung, wie der Rechenunterricht zu ertheilen ist. Der Rechenschieber des Verſassers bietet ein bequemes Lehrmittel für die ersten Stufen des Unterrichts.

---

[2]) Log ist aus dem griech. lógos entlehnt. Dies bezeichnet das Wort, die Vernunft, das geistige Weſen. Der Logarithmus ist alſo die Zahl geistigen Weſens, 1614 von Napier wegen ihrer wunderbaren Eigenschaften (myrifici logarithmorum canonis causa) ſo benannt. Der Name Logarithmus ist undeutsch, der Zuſatz arithmus unnöthig, der Name log alſo genügend, und da bereits gebräuchlich, ſo ohne Schwierigkeit zu verwenden.

Abschnitt 1. Das Zählen.

1. **Erklärung.** Die Zahlenlehre oder Arithmetik (arithmētikē) ist ein Theil der Formenlehre, und gelten für dieselbe folgende Erklärungen der Grösenlehre.

Gröse heist jedes, was Gegenstand des Denkens ist oder werden kann, sofern es nur einen und nicht mehre Werthe hat. Das Zeichen der Gröse ist der Buchstabe. Derselbe Buchstabe bezeichnet in derselben Nummer der Zahlenlehre stets eine und dieselbe Gröse; im Uebrigen kann jeder Buchstabe jede beliebige Gröse bezeichnen.

Einheit oder Element heist eine Gröse, welche ursprünglich gesetzt ist und welche also nicht durch Knüpfung anderer Grösen entstanden ist. Der Buchstabe e ist Zeichen der Einheit.

Zahlgrösen oder Elementargrösen heisen die durch fortschreitendes Zufügen von Einheiten erzeugten Grösen.

Gleich heisen zwei Grösen, wenn man in jeder Knüpfung der Zahlenlehre die eine statt der andern ohne Aenderung des Werthes setzen kann. Das Zeichen der Gleichheit ist $=$. Ungleich heisen zwei Grösen, wenn man in keiner Knüpfung der Zahlenlehre die eine statt der andern ohne Aenderung des Werthes setzen kann. Das Zeichen der Ungleichheit ist $\gtrless$.

Die Klammer ist das Zeichen, dass die in die Klammer eingeschlossenen Grösen zuvor zu einem Gesammte geknüpft werden sollen, ehe dies mit der Gröse auser der Klammer geknüpft werden darf. Stehen mehre Grösen ohne Klammer, so sollen dieselben fortschreitend geknüpft werden, d. h. es soll zunächst die erste mit der zweiten und dann jedesmal das Gesammt mit der nächstfolgenden Gröse geknüpft werden.

2. Auch in der Zahlenlehre gelten die Grundformeln und daraus abgeleitet folgende Gesetze der Grösenlehre, d. h. man kann ohne Aenderung des Werthes

1) jede Plus- und Malklammer beliebig setzen oder weglassen und die Ordnung der Stücke und der Fache oder Factoren beliebig ändern,

2) bei der Vervielfachung (Multiplication) jede Beziehungsklammer auflöfen, indem man jedes Stück des einen Faches oder Factors mit jedem des andern vervielfacht.

3) man kann bei der Erhöhung jedes Bafenzeug auflöfen, indem man die Fache der Bafe zur Stufe erhöht und die Höhen vervielfacht, jede Stufenfumme auflöfen, indem man die Bafe mit jedem Stücke erhöht und die Höhen vervielfacht, und endlich jedes Stufenzeug auflöfen, indem man die Bafe fortschreitend zu den Fachen erhöht; die Ordnung, in welcher man fortschreitend erhöht, ist beliebig,

beim Potenziren jedes Bafenproduct auflöfen, indem man die Factoren mit dem Exponenten potenzirt und die Potenzen multiplicirt, die Exponentenfumme auflöfen, indem man die Bafe mit den Stücken potenzirt und die Potenzen multiplicirt, und endlich das Exponentenproduct auflöfen, indem man die Bafe fortschreitend mit den Factoren potenzirt, die Ordnung, in welcher man fortschreitend potenzirt, ist beliebig.

4) Man kann ohne Aenderung des Werthes Null zu jeder Gröse zufügen (addiren) und jede Gröse mit Eins vervielfachen (multipliciren) und zur Eins erhöhen (potenziren).

5) Jede Gröse giebt mit Null vervielfacht (multiplicirt) Null, zur Null erhöht (potenzirt) Eins.

6) Das Ergebniss jeder diefer Knüpfungen ist wieder eine Zahlgröse.

3. Für die Zahlenlehre gelten folgende befondere Gefetze:

1) Es werden in der Zahlenlehre nur zwei Arten von Einheiten zugefügt (addirt), die Pluseinheit oder pofitive Einheit (e oder + e) und die Stricheinheit oder negative Einheit (— e); die Summe diefer beiden Einheiten ist Null,

2) alle Zahlgrösen, welche durch Zählen, d. h. durch fortschreitendes Zufügen derfelben Einheit entstanden find, find einander ungleich, und

3) es wird jede Zahlgröse nur mit einer Einheit, der Eins, vervielfacht (multiplicirt) und erhöht (potenzirt).

Die durch Zählen der Pluseinheit entstandenen Zahlgrösen heisen Plusgrösen oder pofitive Zahlgrösen, die durch Zählen der Stricheinheit entstandenen Zahlgrösen heisen Strichgrösen oder negative Zahlgrösen.

Die durch Zählen der Eins oder der Stricheins entstandenen

Zahlgrösen heisen **Zahlen** (arithmós, numerus). Die Zeichen der Zahlen sind die **Ziffern**, die allgemeinen Zeichen derselben sind die eckigen Buchstaben (a, b, c).

4. $e + (-e) = 0 \qquad -e + e = 0$

Die Summe der Pluseinheit und der Stricheinheit (der positiven und der negativen Einheit) ist Null.

5. Jede Zahlgröse ist entweder eine Plusgröse oder eine Strichgröse (negative Zahlgröse) oder Null.

Beweis. Jede Zahlgröse ist eine Gröse, welche durch fortschreitendes Zufügen von Einheiten entstanden ist. Enthält dieselbe nur eine Art von Einheiten, so ist sie entweder eine Plus- oder eine Strichgröse. Enthält sie beide Arten der Einheiten, Pluseinheiten und Stricheinheiten, so kann man je eine Pluseinheit und eine Stricheinheit in eine Klammer schliesen (nach No. 2) und solange hiermit fortfahren, bis auser den Klammern nur noch eine Art der Einheiten bleibt. Jede Klammer hat dann die Form $(e + (-e))$ und ist (nach No. 4) Null. Null aber kann (nach No. 2) bei der Zufügung weggelassen werden. Die Klammern können also sämmtlich weggelassen werden. Bleibt nun auser den Klammern keine Einheit, so ist die Zahlgröse Null, bleiben auser den Klammern nur Pluseinheiten, so ist die Zahlgröse eine Plusgröse, bleiben nur Stricheinheiten, so ist sie eine Strichgröse.

6. $(-1)e = -e$

Jede Einheit erhält, mit der Stricheins vervielfacht, das entgegengesetzte Zeichen.

Beweis.
$$
\begin{aligned}
(-1)e &= e(-1) \\
&= 0 + e(-1) && \text{(nach No. 2)} \\
&= -e + e + e(-1) && \text{(nach No. 4)} \\
&= -e + e \cdot 1 + e(-1) && \text{(nach No. 2)} \\
&= -e + e(1 + -1) && \text{(nach No. 2)} \\
&= -e + e \cdot 0 && \text{(nach No. 4)} \\
&= -e + 0 && \text{(nach No. 2)} \\
&= -e && \text{(nach No. 2)}
\end{aligned}
$$

7. Jede Zahlgröse a lässt sich darstellen als Zeug oder Product der Zahl $\mathfrak{a}$ mit der Pluseinheit e jener Zahlgröse, und zwar haben dann a und $\mathfrak{a}$ gleiche Zeichen, und entspricht jeder Einheit in a eine Einheit in $\mathfrak{a}$. Die Zahlgröse $\mathfrak{a}$e heist dann eine **benannte Zahl**, die Zahl $\mathfrak{a}$ heist ihre **Anzahl**, die Einheit e ihr **Name.**

So z. B. ist „6 Meter" eine benannte Zahl, „6" die Anzahl, „Meter" der Name.

Beweis. 1. Wenn der Satz für a gilt (Annahme), so gilt er auch für $a + e$; denn

$$a + e = ae + 1e \qquad \text{(nach Annahme und No. 2)}$$
$$= (a + 1)\,e \qquad \text{(nach No. 2).}$$

Nun gilt er für 0, denn $0 = 0\,e$ (nach No. 2), also gilt er auch für Null und alle Plusgrössen.

2. Wenn der Satz für a gilt (Annahme), so gilt er auch für $a + (-e)$; denn

$$a + (-e) = ae + (-1)\,e \qquad \text{(nach Annahme und No. 1)}$$
$$= [a + (-1)]\,e \qquad \text{(nach No. 2).}$$

Nun gilt der Satz für 0 (nach No. 7, 1), also gilt er auch für jede Strichgrösse (negative Zahlgrösse), also gilt er allgemein.

Abschnitt 2.

Der erste Zählgrad oder Zufügen und Abziehen von Zahlgrösen.

8. Die Summe mehrer Plusgrösen ist wieder eine Plusgröse, die mehrer Strichgrösen ist wieder eine Strichgröse.

Die Summe mehrer positiver Zahlgrösen ist wieder eine positive Zahlgröse, die mehrer negativer Zahlgrösen ist wieder eine negative Zahlgröse.

Beweis. Nach No. 3 ist jede Plusgröse durch fortgesetztes Zufügen von Pluseinheiten entstanden, jede Strichgröse durch fortgesetztes Zufügen von Stricheinheiten; stellt man also jede Zahlgröse als Summe ihrer Einheiten dar, und löst man nach No. 2 die Plusklammer, so ist die Gesammtsumme mehrer Plusgrösen eine Zahlgröse, welche nur fortschreitend verknüpfte Pluseinheiten enthält, d. h. nach No. 3 eine Plusgröse, und ist die Gesammtsumme mehrer Strichgrösen eine Zahlgröse, welche nur fortschreitend verknüpfte Stricheinheiten enthält, d. h. nach No. 3 eine Strichgröse

9. Erklärung. Zwei Zahlgrösen heisen einander gleichartig, wenn beide Plusgrösen oder beide Strichgrösen sind, hingegen einander ungleichartig, wenn die eine eine Plusgröse, die andre eine Strichgröse ist.

Gleichwerthig heisen zwei Zahlgrösen, wenn jeder Einheit der einen eine Einheit der andern entspricht und alle Einheiten derselben Zahlgröse gleich sind. Unter dem Werthe einer Zahlgröse wird die gleichwerthige Plusgröse verstanden.

Entgegengesetzt heisen zwei Zahlgrösen, wenn sie ungleichartig und zugleich gleichwerthig sind, die Zeichen derselben sind a oder $(+ a)$ und $(- a)$.

10. $a + (- a) = 0$ und $(- a) + a = 0$.

Die Summe zweier entgegengesetzter Zahlgrösen ist Null.

Beweis. Nach No. 9 entspricht jedem $(+ e)$ des $(+ a)$ ein $(- e)$ des $(- a)$. Fasst man also je ein $(+ e)$ und ein $(- e)$ in Klammern (nach No. 2), so darf auser den Klammern keine Einheit

übrig bleiben. Jede Klammer enthält aber $e + (-e)$, d. h. ſie ist nach No. 4 Null. Die Summe von Nullen aber ist nach No. 2 ſelbst Null.

11. $a + b + (-b) = a$ und $a + (-b) + b = a$.

Man kann zu jeder Zahlgröse ohne Aenderung des Werthes zwei entgegengeſetzte Zahlgrösen zufügen.

Beweis. $a + b + (-b) = a + (-b) + b$ (nach No. 2)
$= a + [(-b) + b]$ (nach No. 2)
$= a + 0$ (nach No. 10)
$= a$ (nach No. 2).

12. Zwei Zahlgrösen (b und c), welche zu derſelben Zahlgröse a zugefügt gleiche Summen liefern, ſind einander gleich, oder

Wenn $a + b = a + c$ ist (Annahme), ſo ist auch $b = c$ (Folgerung).

Beweis. $b = b + a + (-a)$ (nach No. 11)
$= a + b + (-a)$ (nach No. 2)
$= a + c + (-a)$ (nach Annahme)
$= c + a + (-a)$ (nach No. 2)
$= c$ (nach No. 11).

13. **Erklärung. Abziehen** oder **Subtrahiren** (griech. hyphaireîn, lat. subtrahere). Eine Zahlgröse b von einer Zahlgröse a abziehen heist die entgegengeſetzte Zahlgröse $(-b)$ zu der letztern a zufügen oder addiren. Das Zeichen des Abziehens ist $a - b$ (geleſen a ab b, oder a minus b, oder a Strich b).

Die Gröse a, von der abzuziehen ist, heist der **Vorrath** oder **Minuendus**, die abzuziehende Gröse b heist der **Abzug** oder **Subtrahendus**. Das Ergebniss des Abziehens heist der **Unterschied** oder der **Rest** (quod restat).

Ein Ausdruck, in welchem die Zahlgrösen fortschreitend durch Plus oder Strich (Minus) verknüpft ſind, heist ein Gliederausdruck (Polynómos), jede ſolche Zahlgröse mit ihrem Vorzeichen heist ein Glied (Nómos) des Ausdrucks. So z. B. ist $a + (b - c) - d$ ein Ausdruck von drei Gliedern, a das erſte, $+ (b - c)$ das zweite, $- d$ das dritte Glied.

14. $a - b = a + (-b)$.

Der Unterschied zweier Zahlgrösen ist gleich der Summe aus dem Vorrath (Minuendus) und dem entgegengeſetzten Abzuge (Subtrahendus), oder: Statt Plus Strich kann man ſetzen Strich.

15. $a - a = 0$.

Der Unterschied zweier gleichen Grösen ist Null, und wenn der Unterschied zweier Grösen Null ist, ſo ſind die Grösen gleich.

16. $a - b + b = a$ und $a + b - b = a$.
Eine Zahlgröse fortschreitend abziehen und zufügen oder fortschreitend zufügen und abziehen ändert den Werth nicht.

17. $a - 0 = a$.
Null abziehen ändert den Werth nicht.

Beweis. $a - 0 = a + 0 - 0$ (nach No. 2)
$= a$ (nach No. 16).

18. In jedem Gliederausdrucke oder Polynom kann man die Plusklammern beliebig setzen oder weglassen und die Glieder beliebig ordnen ohne Aenderung des Werthes. Das Ergebniss der Verknüpfung ist wieder eine Zahlgröse.

Beweis. Statt jeder abzuziehenden Gröse kann man nach No. 13 die entgegengesetzte zufügen; dann wird der Gliederausdruck eine Summe, und der Satz gilt nach No. 2.

19. Statt einen Ausdruck von zwei Gliedern (ein Zweiglied oder Binom) abzuziehen kann man die entgegengesetzten Glieder zufügen.

Beweis. Die zwei Glieder des Ausdruckes können entweder beide das Pluszeichen, oder beide das Strichzeichen, oder beide entgegengesetzte Zeichen haben; dies giebt für den Beweis drei Fälle.

1. Es sei gegeben $a - (b + c)$; dann ist
$a - (b + c) = a - (b + c) + c - c$ (nach No. 16)
$= a - (b+c) + c + b - b - c$ (nach No. 16)
$= a - (b+c) + (b+c) - b - c$ (nach No. 2)
$= a - b - c$ (nach No. 16)

2. Es sei gegeben $a - (b - c)$; dann ist
$a - (b - c) = a - (b - c) - c + c$ (nach No. 16)
$= a - (b - c + c) + c$ (nach No. 19, 1)
$= a - b + c$ (nach No. 16).

3. Es sei gegeben $a - (- b - c)$; dann ist
$a - (- b - c) = a - (0 - b - c)$ (nach No. 2)
$= a - [0 - (b + c)]$ (nach No. 19, 1)
$= a - 0 + (b + c)$ (nach No. 19, 2)
$= a + b + c$ (nach No. 17 und No. 2)

20. $a - (- b) = a + b$ und $a - (+ b) = a - b$.
Statt Strich Strich kann man Plus und statt Strich Plus kann man Strich setzen.

Beweis. $a - (\mp b) = a - (0 \mp b)$ (nach No. 2)
$= a - 0 \pm b$ (nach No. 19)
$= a \pm b$ (nach No. 17).

21. Statt einen Gliederausdruck (Polynom) abzuziehen, kann man die Zeichen aller Glieder desselben entgegengesetzt nehmen und die so erhaltenen Glieder fortschreitend zufügen, oder

Eine Strichklammer kann man nach Entgegensetzung der Zeichen aller Klammerglieder weglassen bezüglich setzen.

Beweis. Man stelle im Gliederausdrucke alle Klammern her (nach No. 1), so enthält jede Klammer nur zwei Glieder, von denen das erste eine Plusklammer, das zweite ein ursprüngliches Glied des Ausdruckes ist, bis in der innersten Klammer nur noch zwei ursprüngliche Glieder des Gliederausdruckes enthalten sind. Löst man nun die jedesmal äuserste Strichklammer auf, so erhält die nächst äusere Klammer wieder ein Strichzeichen, und das jedesmal zweite Glied tritt aus der Klammer mit dem entgegengesetzten Zeichen. Fährt man so fort bis zur innersten Klammer, welche nur noch zwei ursprüngliche Glieder enthält, so sind alle Zeichen der freiwerdenden Glieder entgegengesetzt genommen und dann die Glieder zugefügt (nach No. 19). Ebenso werden die beiden Glieder der letzten Klammer (nach No. 19) entgegengesetzt genommen und zugefügt.

22. Gesetz des ersten Zählgrades. In jeder Verknüpfung von Zahlgrösen durch Zufügen oder Abziehen (Addiren oder Subtrahiren) kann man ohne Aenderung des Werthes die Plusklammern ohne Weiteres, die Strichklammer nach Entgegensetzung der Zeichen aller Klammerglieder beliebig weglassen oder setzen und die Ordnung der Glieder beliebig ändern. Das Ergebniss der Verknüpfung ist wieder eine Zahlgröse, das der Verknüpfung von Zahlen ist wieder eine Zahl.

23. Man kann jede durch Zufügen oder Abziehen (Addiren oder Subtrahiren) von Zahlgrösen erzeugte Gröse, welche ungleich Null ist, als Einheit setzen, und gelten dann für alle aus dieser und der entgegengesetzten Gröse erzeugten Grösen alle Gesetze des ersten Zählgrades.

Beweis. Die durch Zufügen und Abziehen erzeugte Gröse, z. B. a, ist nach No. 22 eine Zahlgröse. Für dieselbe ist $a + (-a) = 0$ (nach No. 10), ferner $1 \cdot a = a$ (nach No. 2). Endlich enthält die Gröse, da sie ungleich Null ist, nach No. 5 nur eine Art von Einheiten, also sind die durch fortschreitende Zufügung jener Grösen erzeugten Grösen alle unter sich ungleich (nach No. 3). Also gilt auch die Erklärung No. 3 und kann a als Einheit gesetzt werden.

Vergleichung von Zahlgrösen.

24. Erklärung. Eine Zahlgröse a heist gröser, als eine undre b, und die zweite b heist kleiner als die erste, wenn $a - b$ eine Plusgröse ist. Das Zeichen ist $a > b$ (gelesen a gröser als b) oder $b < a$ (gelesen b kleiner als a).

Die drei Ausdrücke $a > b$, $a = b$ und $a < b$ bilden die drei Arten der Vergleichung.

25. Jede Zahlgröse a ist jeder andern b aus derselben Einheit, entweder gleich oder gröser oder kleiner.

Beweis. Es ist $a - b$ eine Zahlgröse nach No. 22, mithin nach No. 5 entweder Null oder eine Plusgröse oder Strichgröse.

1. Es sei $a - b = 0$; dann ist

$$\begin{aligned} b &= b + 0 && \text{(nach No. 2)} \\ &= b + (a - b) && \text{(nach Annahme)} \\ &= a + (b - b) && \text{(nach No. 24)} \\ &= a + 0 && \text{(nach No. 15)} \\ &= a && \text{(nach No. 2)} \end{aligned}$$

d. h. $a = b$.

2. Es sei $a - b$ eine Plusgröse, so ist $a > b$ (nach No. 24).

3. Es sei $a - b$ eine Strichgröse, so ist die entgegengesetzte $-(a - b)$ eine Plusgröse, und diese ist (nach No. 19) $-(a - b) = -a + b = b - a$, d. h. $b > a$ oder $a < b$ nach No. 24.

26. Wenn in einer Reihe von Zahlgrösen jede vorhergehende gröser ist als die nächstfolgende, so ist auch die erste gröser als die letzte.

Beweis. Es sei $a_1 > a_2$, $a_2 > a_3, \cdots a_{n-1} > a_n$, oder allgemein, es sei $a_a > a_{a+1}$, so ist nach No. 24 $a_a - a_{a+1}$ eine Plusgröse, also auch die Summe

$$\begin{aligned} (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) &= a_1 + (a_2 - a_2) + (a_3 - a_3) + \cdots \\ &\quad + (a_{n-1} - a_{n-1}) - a_n \\ &= a_1 - a_n \end{aligned}$$

eine Plusgröse, d. h. $a_1 > a_n$.

27. Jede Plusgröse ist gröser als Null, jede Strichgröse ist kleiner als Null.

Beweis. 1. Es sei a eine Plusgröse, so ist auch $a - 0 = a$ (nach No. 17) eine Plusgröse, d. h. nach No. 24 $a > 0$.

2. Es sei a eine Strichgröse, $b = -a$ die entgegengesetzte Plusgröse, so ist $0 - a = 0 + (-a) = 0 + b = b$ (nach No. 14 und No. 2), d. h. eine Plusgröse, also $a < 0$ nach No. 24.

28. Die Summe zweier ungleichartiger Zahlgrösen a und b

ist demjenigen Stücke gleichartig, das den grösern Werth hat, und zwar findet man den Werth dieser Summe, wenn man unter den Werthen der Stücke den kleinern von dem grösern abzieht.

Beweis. Es sei a die Zahlgröse, deren Werth gröser ist. Da die beiden Zahlgrösen ungleichartig sind, so ist entweder a eine Plus- und b eine Strichgröse, oder es ist a eine Strich- und b eine Plusgröse.

1. Es sei a eine Plus- und b eine Strichgröse, so setze $b = -b_1$, dann ist a der Werth von a, b_1 der von b. Da nun der Werth von a gröser ist als der von b, so ist $a > b_1$, oder $a - b_1$ eine Plusgröse (nach No. 24), mithin ist die Summe $a + b = a + (-b_1)$ $= a - b_1$ dem a gleichartig und wird ihr Werth erhalten, wenn man unter den Werthen der Stücke den kleinern vom grösern abzieht.

2. Es sei a eine Strich- und b eine Plusgröse, so setze $a = -a_1$, dann sind a_1 und b die beiden Werthe und, da der von a gröser als der von b, so ist $a_1 - b$ eine Plusgröse (nach No. 24); mithin ist $a + b = -a_1 + b = -(a_1 - b)$ eine Strichgröse oder dem a gleichartig, und der Werth $a_1 - b$ wird erhalten, wenn man unter den Werthen der Stücke den kleinern von dem grösern abzieht.

29. Die Vergleichung ändert sich nicht, wenn man auf beiden Seiten Gleiches zufügt oder abzieht.

Beweis. Es sei $a > b$, d. h. nach No. 24 $a - b$ eine Plusgröse, dann ist auch

$$a \pm c - (b \pm c) = a - b \pm (c - c) \quad \text{(nach No. 22)}$$
$$= a - b \quad \text{(nach No. 16)}$$

eine Plusgröse, d. h. $a \pm c > b \pm c$, was zu beweisen war.

30. Wächst in einer Summe zweier Zahlgrösen das eine Stück, während das andere gleich bleibt, so wächst auch die Summe.

31. Wachsen in einer Summe mehrer Zahlgrösen ein oder mehre Stücke, während kein Stück kleiner wird, so wächst auch die Summe.

Beweis. Lässt man zunächst nur ein Stück wachsen, während die andern gleich bleiben, so wächst die Summe nach No. 30. Lässt man jedesmal in der so erhaltenen Summe ein Stück wachsen, während die andern gleich bleiben, bis alle Stücke, welche wachsen sollen, gröser geworden sind, so wächst auch jedesmal die Summe, man erhält eine Reihe von Summen, in welcher jede nächstfolgende

gröser als die vorhergehende ist, alfo ist nach No. 26 auch die letzte gröser als die erste.

32. Wächst in einem Unterschiede der Abzug (Subtrahend), während der Vorrath (Minuend) gleich bleibt, fo nimmt der Unterschied ab.

Beweis. Es fei $c > b$, d. h. $c - b$ eine Plusgröse, fo foll bewiefen werden, dass $a - b > a - c$, d. h. dass $(a-b)-(a-c)$ eine Plusgröse fei. Es ist aber

$$(a-b)-(a-c) = c - b + (a - a) \quad \text{(nach No. 22)}$$
$$= c - b \quad \text{(nach No. 16 und No. 2)},$$

d. h. nach der Vorausfetzung eine Plusgröse.

Abschnitt 3.

Der zweite Zählgrad, oder Vervielfachen und Theilen.

33. Das Zeug (Product) zweier Zahlgrösen erhält ein Pluszeichen, wenn beide Grösen gleiche Zeichen, ein Strichzeichen, wenn sie entgegengesetzte Zeichen haben. Der Werth des Zeuges ist das Zeug aus den Werthen der Grösen.

Beweis. Die beiden Grösen können entweder beide Pluszeichen, oder beide Strichzeichen, oder beide entgegengesetzte Zeichen haben; dies giebt drei Fälle für den Beweis.

1. Es sei gegeben $(+a)(+a)$; dann ist $(+a)(+a) = aa = +aa$ (nach 9).

2. Es sei gegeben $(+a)(-a)$; dann ist

$$\begin{aligned}(+a)(-a) &= a(-a) + aa - aa &&\text{(nach No. 9 und 16)}\\ &= a(-a+a) - aa &&\text{(nach No. 2)}\\ &= a0 - aa &&\text{(nach No. 15)}\\ &= -aa &&\text{(nach No. 2).}\end{aligned}$$

3. Es sei gegeben $(-a)(-a)$; dann ist

$$\begin{aligned}(-a)(-a) &= aa - aa + (-a)(-a) &&\text{(nach No. 16)}\\ &= aa + a(-a) + (-a)(-a) &&\text{(n. No. 33, 2)}\\ &= aa + [a + (-a)](-a) &&\text{(nach No. 2)}\\ &= aa + 0(-a) &&\text{(nach No. 10)}\\ &= aa &&\text{(nach No. 2).}\end{aligned}$$

34. $(-1)a = -a$

Jede Zahlgröse erhält mit der Stricheins vervielfacht das entgegengesetzte Zeichen.

35. Jedes Zeug (Product) von mehren Fachen oder Factoren erhält ein Pluszeichen, wenn $2a$ Fache ein Strichzeichen erhalten, dagegen ein Strichzeichen, wenn $2a + 1$ Fache ein Strichzeichen erhalten.

Beweis. Nach No. 2 kann man die Fache oder Factoren beliebig ordnen und die Malklammern beliebig setzen. Man kann also auch von den Fachen, welche Strichzeichen enthalten, je zwei

in eine Klammer schliesen und zu einem Zeuge oder Product verknüpfen. Jedes folches Zeug erhält nach No. 33 ein Pluszeichen. Enthielten alfo $2a$ Fache oder Factoren ein Strichzeichen, fo erhalten wir a Zeuge mit Pluszeichen, deren Zeug gleichfalls ein Pluszeichen erhält. Enthielten dagegen $2a + 1$ Fache oder Factoren ein Strichzeichen, fo bleibt ein Fach mit einem Strichzeichen übrig, das mit dem Zeuge aus den andern Fachen entgegengefetzt ist und dem ganzen Zeuge nach No. 33 ein Strichzeichen giebt.

36. In einem Zeuge oder Producte zweier Zahlgrösen aa, welches Null ist, ist, wenn die eine Zahlgröse a ungleich Null ist, die andre a gleich Null.

Beweis. (Trennend oder indirect.) Die zweite Zahlgröse ist nach No. 5 entweder Null, oder mit a gleich oder entgegengefetzt bezeichnet. Wenn fie mit a gleich bezeichnet wäre, fo wäre das Zeug aa nach No. 33 eine Plusgröse, alfo ungleich Null; wenn fie mit a entgegengefetzt bezeichnet wäre, fo wäre das Zeug aa nach No. 33 eine Strichgröse, alfo wieder ungleich Null. Da aber das Zeug aa gleich Null fein foll, fo kann a weder mit a gleich noch entgegengefetzt bezeichnet fein, d. h. es muss nach No. 5 Null fein.

37. Zwei Zahlgrösen a und b, welche mit derfelben Zahlgröse c ungleich Null vervielfacht dasfelbe Zeug oder Product geben, find einander gleich.

Beweis. 1. Das Zeug $ac = bc$ fei Null; dann ist, da c ungleich Null ist, nach 36 $a = 0$ und $b = 0$, d. h. $a = b$.

2. Das Zeug $ac = bc$ fei ungleich Null; dann nehme an $a = b + d$, fo ist

$$bc = ac = (b + d)c \qquad \text{(nach Annahme)}$$
$$= bc + dc \qquad \text{(nach No. 2)},$$

d. h. dc eine Gröse, welche zugefügt den Werth von bc nicht ändert, d. h. nach No. 2 $dc = 0$, und, da c ungleich Null ist, nach No. 36 $d = 0$, d. h. $a = b$.

38. Erklärung. Die Brucheinheit $e\frac{1}{a}$ oder $\frac{e}{a}$ (gelefen e atel oder e durch a) ist diejenige Einheit, welche mit der Zahlgröse a vervielfacht oder multiplicirt die Einheit e giebt, fofern

1. a ungleich Null ist und
2. a eine Zahlgröse aus der Einheit e oder eine reine Zahl ist.

Es heist $\frac{1}{a}$ die umgekehrte Gröse von a.

39. Erklärung. Theilen oder Dividiren (gr. parabállein, lat. dividere) eine Zahlgröse a durch eine andere b heist die erste

Gröse a mit der umgekehrten der zweiten, mit $\frac{1}{b}$ vervielfachen oder multipliciren.

Die erste Gröse a heist der **Zähler** oder **Dividendus**, die zweite Gröse b der **Nenner** oder **Divifor**, das Ergebniss der Theilung heist der **Bruch** oder **Quotient**. Das Zeichen der Theilung ist $\frac{a}{b}$ oder a : b (gelefen a durch b).

Der Nenner heist, wenn er eine benannte Zahl oder eine Nennzahl ist, **Mas**, wenn eine reine Zahl, **Theiler**, das Theilen heist im ersten Falle **Messen** (gr. metreîn), im zweiten Falle **Zertheilen** (gr. metrízein).

Das Glied eines Gliederausdruckes heist, wenn es keinen Nenner enthält, eine **ganze Zahl**, wenn es Nenner enthält, eine **Bruchzahl**. Ein Zahlausdruck, der ganze Zahlen und Bruchzahlen enthält, heist eine **gemischte Zahl**.

Fache (Factoren) und Nenner (Diviforen) eines Gliedes heisen mit gemeinfamem Namen **Vorzahlen** oder **Coefficienten**.

40. $\frac{e}{a}a = e$ und $\frac{1}{a}a = 1$.

Eine Bruchheinheit, mit ihrem Nenner vervielfacht oder multiplicirt, giebt die Einheit des Zählers.

41. $\left(\frac{1}{-a}\right) = -\left(\frac{1}{a}\right)$.

In einer Brucheinheit kann das Strichzeichen des Nenners vor die Brucheinheit felbst gefetzt werden.

Beweis. Es ist $\left(\frac{1}{-a}\right)(-a) = 1$ (nach No. 40)

$= \frac{1}{a}a$ (nach No. 40)

$= \left(-\left(\frac{1}{a}\right)\right)(-a)$ (nach No. 33)

alfo ist auch $\left(\frac{1}{-a}\right) = -\left(\frac{1}{a}\right)$ nach No. 37.

42. $\frac{a}{b} = a\frac{1}{b}$.

Der Bruch zweier Zahlgrösen ist gleich dem Zeuge aus dem Zähler und umgekehrten Nenner (oder gleich dem Producte aus Dividend und umgekehrtem Divifor).

43. Jeder Bruch ist wieder eine Zahlgröse.

Beweis. Der Bruch, z. B. $\frac{a}{b}$ ist gleich dem Zeuge oder Producte aus dem Zähler und umgekehrten Nenner, d. h. $a\frac{1}{b}$ nach 42. Hier ist $\frac{1}{b}$ eine Einheit nach 38, mithin, wenn a eine reine Zahl a, so ist $a \cdot \frac{1}{b}$ eine Zahlgröse nach No. 7, wo a die Anzahl (der Zähler), $\frac{1}{b}$ den Namen (Nenner) bildet. Wenn dagegen a eine Nennzahl ist ae, so ist $\frac{a}{b} = ae\frac{1}{b}$, d. h. das Zeug oder Product einer Zahl und zweier Einheiten oder Elemente. Für diese gilt nach No. 2 Einigung, also ist $\frac{a}{b} = a\left(e\frac{1}{b}\right) = a\frac{e}{b}$ (nach No. 38), wo a eine reine Zahl, $\frac{e}{b}$ nach No. 38 eine Einheit, also $\frac{a}{b}$ nach No. 7 wieder eine Nennzahl oder eine Zahlgröse.

44. Für Brüche mit gleichem Nenner gelten alle Gesetze des Zufügens und Abziehens (Addirens und Subtrahirens) von Zahlgrösen.

45. Für Zeuge beliebiger Fache und Nenner oder für Producte beliebiger Factoren und Divisoren gelten alle Gesetze der Vervielfachung von Zahlgrösen.

Beweis. Statt jedes Nenners oder Divisors a, der in dem Zeuge vorkommt, kann man nach No. 42 die umgekehrte Gröse $\frac{1}{a}$ als Fach oder Factor setzen und vervielfachen; ebenso kann man statt des Nenners — a nach No. 48 und 42 die umgekehrte Gröse $-\left(\frac{1}{a}\right)$ als Fach oder Factor setzen und vervielfachen. Alle Nenner verwandeln sich auf diese Weise in Fache, und gelten mithin für dieselben alle Gesetze der Vervielfachung von Zahlgrösen.

46. Jeder Bruch erhält ein Pluszeichen, wenn Zähler und Nenner gleiche Zeichen, ein Strichzeichen, wenn sie entgegengesetzte Zeichen haben.

Beweis. Unmittelbar aus No. 33 und 45.

47. $\frac{a}{a} = 1.$

Der Bruch oder Quotient gleicher Zahlgrösen ist Eins, und wenn

der Bruch zweier Zahlgrösen Eins ist, so sind die beiden Zahlgrösen gleich.

Beweis. $\frac{a}{a} = a\frac{1}{a}$ (nach No. 42)

$= \frac{1}{a}a$ (nach No. 45)

$= 1$ (nach No. 40)

48. $\frac{a}{1} = a.$

Durch Eins theilen oder dividiren ändert nichts.

Beweis. $\frac{a}{1} = a\frac{1}{1}$ (nach No. 42)

$= a1$ (nach No. 47)

$= a$ (nach No. 2).

49. $\frac{ab}{b} = a$ und $\frac{a}{b}b = a.$

Eine Zahlgröse durch eine andre fortschreitend vervielfachen und theilen, oder fortschreitend theilen und vervielfachen ändert die Zahlgröse nicht.

Beweis. $\frac{ab}{b} = \frac{a}{b}b = a\left(\frac{1}{b}b\right)$ (nach No. 45)

$= a1$ (nach No. 40)

$= a$ (nach No. 2).

50. $\frac{0}{a} = 0.$

Ein Bruch, dessen Zähler Null ist, ist Null.

Beweis. $\frac{0}{a} = 0 \cdot \frac{1}{a}$ (nach No. 42)

$= 0$ (nach No. 2).

51. Wenn $\frac{a}{b} = 0$ ist (Annahme), so ist $a = 0$ (Folgerung), oder: In jedem Bruche, der Null ist, ist der Zähler Null.

Beweis. $a = \frac{a}{b}b$ (nach No. 49)

$= 0b$ (nach Annahme)

$= 0$ (nach No. 2).

52. Statt durch ein Zeug oder Product zweier Zahlgrösen zu theilen, kann man mit den umgekehrten Zahlgrösen fortschreitend vervielfachen, und umgekehrt.

Beweis. Die beiden Zahlgrösen können nach Erklärung No. 39 entweder beide Fache (Factoren), oder beide Nenner (Divi-

foren), oder der eine ein Fach, der andre ein Nenner fein; dies giebt für den Beweis drei Fälle.

1. Es fei gegeben $\frac{a}{bc}$ oder $a:(bc)$; dann ist

$$\begin{aligned} a:(bc) &= [a:(bc)]\,c:c && \text{(nach No. 49)} \\ &= [a:(bc)]\,cb:b:c && \text{(nach No. 49)} \\ &= [a:(bc)]\,bc:b:c && \text{(nach No. 45)} \\ &= a:b:c && \text{(nach No. 49).} \end{aligned}$$

2. Es fei gegeben $\frac{a}{b\frac{1}{c}}$ oder $a:(b:c)$; dann ist

$$\begin{aligned} a:(b:c) &= a:(b:c):c\cdot c && \text{(nach No. 49)} \\ &= a:(b:c\cdot c)\cdot c && \text{(nach No. 52, 1)} \\ &= a:b\cdot c = \frac{a}{b}c && \text{(nach No. 49).} \end{aligned}$$

3. Es fei gegeben $\frac{a}{\frac{1}{b}\frac{1}{c}} = a:(1:b:c)$; dann ist

$$\begin{aligned} a:(1:b:c) &= a\,(1:bc) && \text{(nach No. 52, 1)} \\ &= (a:1)\,bc && \text{(nach No. 52, 2)} \\ &= abc && \text{(nach No. 8)} \end{aligned}$$

53. $$a:\frac{b}{c} = a\frac{c}{b}.$$

Durch einen Bruch theilt man, indem man den Bruch umkehrt und vervielfacht.

54. $$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$$

Man kann einen Bruch ohne Aenderung feines Werthes erweitern und heben, d. h. Zähler und Nenner mit derfelben Zahl vervielfachen und theilen.

Beweis. $$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= a\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}c && \text{(nach No. 42 und 49)} \\ &= ac\frac{1}{b}\frac{1}{c} && \text{(nach No. 45)} \\ &= \frac{ac}{bc} && \text{(nach No. 52).} \end{aligned}$$

55. $$\frac{ea}{eb} = \frac{a}{b}.$$

Jeder Bruch lässt fich auf eine Form bringen, dass der Nenner eine Pluszahl ist; namentlich ist bei der Messungsaufgabe der Bruch zweier Zahlgrösen gleich dem Bruche ihrer Zahlwerthe. Diefe Form wird künftig stets vorausgefetzt.

56. Statt durch das Zeug oder Product mehrer Zahlgrösen zu theilen kann man mit den umgekehrten Zahlgrösen fortschreitend vervielfachen.

Beweis. Man stelle im Zeuge oder Producte alle Klammern her; dann ist jede Klammer ein Zeug aus zwei Grösen, deren erste eine Malklammer (nur in der innersten Klammer eine ursprüngliche Zahlgröse), deren zweite eine ursprüngliche Zahlgröse ist. Löst man nun die äuserste Klammer, so ist diese eine Theilklammer und wird gelöst, indem man die Zahlgrösen umkehrt und vervielfacht. Die nächst äusere Malklammer wird dadurch eine Theilklammer, die zweite Gröse aber die umgekehrte Zahlgröse, löst man so fortschreitend von ansen nach innen die jedesmal äuserste Klammer, welche eine Theilklammer ist, auf, so erhält jede Zahlgröse, die frei wird, das umgekehrte Zeichen, bis alle frei sind und fortschreitend zu vervielfachen sind.

57. Gesetz des zweiten Zählgrades. In jeder Vervielfachungs- und Theilungs-(Multiplications- und Divisions-)Verknüpfung von Zahlgrösen kann man ohne Aenderung des Werthes die Malklammer ohne Weiteres, die Theilklammer nach Umkehr aller Fache und Nenner (Factoren und Divisoren) in der Theilklammer beliebig weglassen oder setzen und die Ordnung der Fache und Nenner beliebig ändern. Das Ergebniss der Verknüpfung ist wieder eine Zahlgröse, und zwar hat dieselbe ein Pluszeichen, wenn $2a$ Fache oder Nenner ein Strichzeichen enthielten, dagegen ein Strichzeichen, wenn $2a + 1$ Fache oder Nenner ein Strichzeichen enthielten.

58. Beziehungsgesetz des zweiten Zählgrades. In jedem Zeuge von Fachen und Nennern (oder in jedem Producte von Factoren und Divisoren) kann man ohne Aenderung des Werthes jedes Stück des einen Fachs mit jedem des andern vervielfachen und durch jeden ganzen Nenner theilen und die erhaltenen Zenge zufügen.

Anm. Dagegen darf man nicht durch die Stücke des Nenners theilen.

59. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}.$

Brüche von gleichem Nenner kann man zufügen oder abziehen (addiren oder subtrahiren), indem man die Zähler entsprechend zufügt oder abzieht und das Ergebniss durch den Nenner theilt, oder

Eine Summe oder einen Unterschied theilt man durch eine Zahlgröse, indem man die Glieder einzeln theilt und die Brüche entsprechend zufügt oder abzieht.

Beweis. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = a\frac{1}{b} \pm c\frac{1}{b}$ (nach No. 42)

$= (a \pm c)\frac{1}{b}$ (nach No. 45)

$= \frac{a \pm c}{b}$ (nach No. 42)

60. Gemeinnenner. Jede gegebene Reihe von Brüchen, deren Zähler derselben Einheit e angehören, kann man auf einen Gemeinnenner bringen, welcher das Zeug oder Product der bisherigen Nenner ist, oder

Jede gegebene Reihe von Brüchen, deren Zähler derselben Einheit e angehören, kann man in Brüche verwandeln, deren Brucheinheit die Einheit e, getheilt durch das Zeug oder Product sämmtlicher Nenner, ist.

Beweis. Es sei die Reihe der gegebenen Brüche

$$\frac{a_1 e}{b_1}, \frac{a_2 e}{b_2}, \frac{a_3 e}{b_3}, \dots \frac{a_n e}{b_n},$$

das allgemeine Glied derselben $\frac{a_m e}{b_m}$, ferner sei $P = b_1 b_2 b_3 \cdots b_n$ das Zeug oder Product sämmtlicher Nenner und $P_m = \frac{P}{b_m}$, d. h. das Zeug der Nenner, in dem b_m fehlt, so lässt sich der Bruch $\frac{a_m e}{b_m}$ durch den Bruch $\frac{P_m}{P_m} = 1$ erweitern nach No. 54, und wird dann $\frac{a_m P_m e}{P}$. Die sämmtlichen Brüche der Reihe erhalten hierdurch gleichen Nenner und erhalten die Gestalt $\frac{a_1 P_1 e}{P}, \frac{a_2 P_2 e}{P}, \frac{a_3 P_3 e}{P} \dots \frac{a_n P_n e}{P}$.

61. Zufügen und Abziehen der Brüche. Mehre Brüche kann man zufügen oder abziehen (addiren oder subtrahiren), indem man sie auf gleichen Nenner bringt, dann die Zähler zufügt oder abzieht und das Ergebniss durch den Nenner theilt, oder

Mehre Brüche von ungleichem Nenner kann man zufügen oder abziehen, indem man jeden Zähler mit dem Zeuge (Producte) aus den Nennern aller andern Brüche vervielfacht, die erhaltenen Zeuge entsprechend zufügt oder abzieht und das Ergebniss durch das Zeug sämmtlicher Nenner theilt, oder

Wenn alle Zeichen wie in No. 60 bleiben, so ist

$$\frac{a_1 e}{b_1} \pm \frac{a_2 e}{b_2} \pm \frac{a_3 e}{b_3} \pm \cdots \pm \frac{a_n e}{b_n} = \frac{a_1 P_1 e \pm a_2 P_2 e \pm a_3 P_3 e \pm \cdots \pm a_n P_n e}{P}.$$

62. Man kann jede durch Zufügen und Abziehen, Verviel-

fachen und Theilen von Zahlgrösen erzeugte Gröse, welche ungleich Null ist, als Einheit fetzen, und gelten dann für alle aus diefer und der ihr entgegengefetzten Gröse erzeugten Grösen alle Gefetze des ersten und zweiten Zählgrades.

Beweis. Jede durch die vier Rechnungsarten erzeugte Gröse a ist nach No. 22 und 57 wieder eine Zahlgröse. Nach No. 10 ist aber $a + (-a) = 0$; nach No. 2 ist ferner $1a = a$; endlich ist a nach No. 5, weil e ungleich Null ist, entweder eine Plusgröse oder Strichgröse, d. h. es enthält nur eine Art von Einheiten. Die durch fortschreitendes Zufügen der Gröse a erzeugten Grösen enthalten mithin auch nur eine Art von Einheiten und find nach No. 3 alle einander ungleich. Alfo gilt auch für die Gröse a die für die Einheit in No. 3 gegebene Erklärung und kann a als Einheit gefetzt werden.

Vergleichung von Zeugen und Brüchen.

63. Eine Vergleichung ändert fich nicht, wenn man auf beiden Seiten mit gleichen Pluszahlen vervielfacht oder theilt; fie wird aber entgegengefetzt, wenn man auf beiden Seiten mit gleichen Strichzahlen vervielfacht oder theilt.

Beweis. 1. Es fei $a > b$, d. h. $a - b$ eine Pluszahl nach No. 24, und fei c eine Pluszahl, fo ist nach No. 33 $(a - b)c = ac - bc$ eine Pluszahl, mithin $ac > bc$. Ebenfo ist nach No. 46 und 44 $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$ eine Pluszahl, mithin $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

2. Es fei $a > b$, d. h. $a - b$ eine Pluszahl, dagegen e eine Strichzahl; dann ist nach No. 33 $(a - b)c = ac - bc$ eine Strichzahl, d. h. $bc - ac$ eine Pluszahl und nach No. 24 $ac < bc$. Ebenfo ist dann $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{e}$ nach No. 46 eine Strichzahl, d. h. $\frac{b}{e} - \frac{a}{c}$ eine Pluszahl und $ac < be$.

64. Wächst in einem Zeuge oder Producte zweier Zahlgrösen die eine der Grösen, während die andere gleich bleibt und eine Pluszahl ist, fo wächst auch das Zeug, und umgekehrt

Wenn ein Zeug oder Product zweier Zahlgrösen wächst, während die eine der Grösen gleich bleibt und eine Plusgröse ist, fo wächst auch die andere der Grösen.

Beweis. Unmittelbar nach No. 63.

65. Wachfen in einem Zeuge oder Producte mehre Plusgrösen einer oder mehrer der Grösen, während keine kleiner wird, fo wächst auch das Zeug.

Beweis. Lässt man zunächst nur eine Gröse wachſen, während die andern gleich bleiben, ſo wächst auch nach No. 64 das Zeug. Lässt man jedesmal in dem ſo erhaltenen Zeuge die eine Gröse wachſen, während die andern gleich bleiben, bis alle Grösen, welche wachſen ſollen, gröser geworden ſind, ſo wächst auch jedesmal das Zeug, und man erhält eine Reihe von Zeugen, in welcher jedes nächstfolgende gröser als das vorhergehende ist, alſo ist nach No. 26 auch das letzte gröser als das erste.

66. Das Zeug oder Product mehrer Pluszahlen ist, wenn die einzelnen Zahlen kleiner als Eins ſind, auch kleiner als Eins, wenn die einzelnen Zahlen gröser als Eins ſind, auch gröser als Eins.

Beweis. Unmittelbar aus No. 65.

67. Ein Bruch von Pluszahlen, dessen Zähler kleiner ist als der Nenner, heist eine ächte Bruchzahl.

68. Jede ächte Bruchzahl $\frac{a}{b}$ ist kleiner als Eins, und jede Zahlgröse, welche kleiner ist als Eins, ist eine ächte Bruchzahl.

Beweis. 1. Es ſei $\frac{a}{b}$ ein ächter Bruch, d. h. a und b Pluszahlen und $b > a$, ſo ist $b - a$ eine Pluszahl, alſo auch $\frac{b-a}{b} = 1 - \frac{a}{b}$ (nach No. 57) eine Pluszahl, d. h. $\frac{a}{b} < 1$.

2. Es ſei a kleiner als 1, ſo ist $a = \frac{a}{1}$, d. h. nach No. 67 ein ächter Bruch.

69. Das Zeug oder Product ächter Bruchzahlen ist wieder eine ächte Bruchzahl.

Beweis. Unmittelbar aus No. 66.

70. Wächst in einem Bruche von Plusgrösen, während der Zähler gleich bleibt, der Nenner, ſo nimmt der Bruch ab, und umgekehrt

Nimmt ein Bruch von Plusgrösen ab, dessen Zähler gleich bleibt, ſo wächst der Nenner.

Beweis. 1. Wenn a, b und c Plusgrösen ſind und $c > b$, d. h. $c - b$ eine Plusgröse, ſo ist $\frac{a(c-b)}{bc} = \frac{ac - ab}{bc} = \frac{a}{b} - \frac{a}{c}$ (nach No. 57) eine Plusgröse, alſo der Bruch $\frac{a}{c} < \frac{a}{b}$.

2. Wenn a, b und c Plusgrösen ſind und $\frac{a}{c} < \frac{a}{b}$, ſo ist

$\frac{a}{b} - \frac{a}{c}$ eine Plusgröse, alſo ist auch $\frac{a}{b} - \frac{a}{c} = \frac{ac - ab}{bc} = \frac{a(c-b)}{bc}$ eine Plusgröse und, da a, b und c Plusgrösen, auch c — b eine Plusgröse (nach No. 57), d. h. $c > b$.

Eigenschaften ganzer Pluszahlen.

71. Erklärung. Man ſagt, eine ganze Zahl a gehe in eine andre b auf, wenn es eine ganze Zahl c giebt, welche mit der ersten a vervielfacht die zweite b giebt, oder wenn $b = ac$, und zwar ſagt man dann, a gehe in b cmal auf.

72. Eins geht in jede Zahl auf, und jede Zahl geht in ſich ſelbst auf.

Beweis. Es ſei a eine beliebige Zahl, dann ist $a = 1 \cdot a$, alſo u. ſ. w.

73. Eine Zahl a, welche in b aufgeht, ist nicht gröser als b.

Beweis. Es ſeien a, b und c ganze Pluszahlen, d. h. jede Eins oder gröser als Eins, und $b = ac$. Angenommen nun, dass $a > b$ wäre, ſo wäre auch $a - b$ eine Pluszahl, alſo auch $(a - b)c = ac - bc = b - bc$ eine Pluszahl.

Dies ist aber unmöglich, denn ist $c = 1$, ſo ist $b - bc = b - b = 0$, alſo keine Pluszahl, und ist $c > 1$, ſo ist nach No. 64 auch $bc > b$, mithin $b - bc$ eine Strichzahl, d. h. keine Pluszahl, alſo ist auch die Annahme unmöglich.

74. Zwei ganze Pluszahlen, welche gegenſeitig in einander aufgehen, ſind einander gleich.

Beweis. Da a in b aufgeht, ſo ist nach No. 73 a nicht $> b$, und da b in a aufgeht, ſo ist nach No. 72 auch a nicht $< b$, alſo ist nach No. 25 $a = b$.

75. Wenn eine Zahl a in eine zweite b $\mathfrak{a}$mal aufgeht und die zweite b in eine dritte c $\mathfrak{b}$mal aufgeht, ſo geht auch die erste in die dritte, und zwar $\mathfrak{ab}$mal auf.

Beweis. Da a in b $\mathfrak{a}$mal aufgeht, und da b in c $\mathfrak{b}$mal aufgeht, ſo ist $b = a\mathfrak{a}$ und $c = b\mathfrak{b}$, alſo ist $c = b\mathfrak{b} = a\mathfrak{a}\mathfrak{b} = a(\mathfrak{ab})$, d. h. a geht in c $\mathfrak{ab}$mal auf.

76. Erklärung. Eine Zahl, welche in 2 andre Zahlen aufgeht, heist ihr Gemeinmas oder gemeinschaftliches Mas; zwei Zahlen, deren gröstes Gemeinmas 1 ist, heisen einander fremd oder primär.

77. Das Gemeinmas zweier Zahlen ist auch ein Gemeinmas ihrer Summe, ihres Unterschiedes und jedes Gliederausdruckes

dieſer Zahlen, in dem nur ganze Zahlen als Fache oder Factoren vorkommen.

Beweis. Es ſei c das Gemeinmas von a und b und gehe in a amal, in b bmal auf, d. h. es ſei $a = ac$ und $b = bc$, ſo ist

1. $a + b = ac + bc = (a + b)c$.
2. $a - b = ac - bc = (a - b)c$.
3. Ein beliebiger Gliederausdruck der Zahlen a und b lässt ſich ausdrücken durch die Form $S(\pm a d_m \pm b e_n)$, wo d_m und e_n ganze Zahlen ſind; es ist aber

$$S(\pm a d_m \pm b e_n) = S(\pm (ac) d_m \pm (bc) e_n)$$
$$= S(\pm c(a d_m) \pm c(b e_n)) \quad \text{(nach No. 57)}$$
$$= c(S(\pm a d_m \pm b e_n)) \quad \text{(nach No. 58)},$$

wo $S(\pm a d_m \pm b e_n)$ eine Summe ganzer Zahlen, alſo nach No. 22 wieder eine ganze Zahl, mithin c das Gemeinmas des gegebenen Gliederausdruckes.

78. Wenn man aus einem gegebenen Pare von Pluszahlen a und b ein zweites Par dadurch ableitet, dass man die kleinere von der gröseren abzieht und die kleinere und den Unterschied als zweites Par ſetzt; wenn man auf gleiche Weiſe aus dem zweiten Pare ein drittes Zahlenpar ableitet und hiermit ſo lange fortfährt, als die beiden Zahlen eines Pares noch verschieden ſind, ſo muss man zuletzt zu einem Pare gleicher Zahlen gelangen und jede derſelben ist das gröste Gemeinmas der gegebenen Zahlen, und jedes Gemeinmas von a und b geht auch in dies gröste Gemeinmas auf.

Beweis. 1. Die Summe der beiden Zahlen eines folgenden Pares ist mindestens um eins kleiner, als die des vorhergehenden, denn ſei die des vorhergehenden Pares $c + d$, ſo ist die des nächstfolgenden $c - d + d = c$, d. h. um die Pluszahl d kleiner, mindestens alſo um 1 kleiner als die des vorhergehenden Pares.

Geht man alſo von dem Pare $a + b$ aus und bildet auf obige Weiſe $a + b$ neue Pare, ſo müssen entweder beide Zahlen gleich ſein, oder es muss die Summe der beiden Zahlen des letzten Pares mindestens um $a + b$ kleiner als das erste, d. h. Null oder eine Strichzahl ſein

Es bleibt aber, da die gegebenen Zahlen Pluszahlen ſind und jedesmal die kleinere von der gröseren abgezogen wird, nach No. 24 auch der Unterschied eine Pluszahl, alſo auch beide Zahlen jedes folgenden Pares Pluszahlen. Mithin kann auch die Summe der beiden Zahlen eines Pares nie Null oder eine Strichzahl werden, und muss man alſo zuletzt zu einem Pare gleicher Zahlen p gelangen.

2. Diese Zahl p ist aber, da sie aus den gegebenen Zahlen a und b durch wiederholtes Abziehen erzeugt ist, ein Gliederausdruck von a und b, in dem nur ganze Zahlen vorkommen, also ist auch jedes Gemeinmas von a und b ein Gemeinmas von der letzten Zahl p und kann also nach No. 73 nicht gröser als p sein. Ferner ist auch jede Zahl eines vorhergehenden Pares eine Summe aus den Zahlen des folgenden, da die kleinere bleibt, und die grösere die Summe ist aus der kleineren und dem Unterschiede, also sind auch die gegebenen Zahlen a und b Summen der beiden gleichen p und p; also ist auch jedes Gemeinmas von p und p ein Gemeinmas von a und b, d. h. da p Gemeinmas von p und p ist, auch p das Gemeinmas von a und b, und zwar, da kein Gemeinmas von a und b gröser als p sein kann, das gröste.

79. Wenn m das gröste Gemeinmass von a und b ist, so ist mc das gröste Gemeinmas von ac und bc.

Beweis. Das gröste Gemeinmas von a und b findet man, indem man jedesmal die kleinere Gröse von der gröseren abzieht und aus der kleineren und dem Unterschiede ein neues Par bildet. Sei b die kleinere, so erhält man also aus a und b das neue Par a — b und b. Ganz auf gleiche Weise erhält man aus dem Pare ac und bc das neue Par $ac - bc = (a - b)c$ und bc. Das entsprechende neue Par aus ac und bc ist also c mal so gros als das aus a und b. Ganz auf gleiche Weise verhält es sich aber mit jedem neuen Pare, welches durch Abziehen der kleinern von der grösern Zahl gebildet wird. Auch das letzte Par gleicher Zahlen, welches aus ac und bc gewonnen wird, ist also c mal so gros, als das letzte Par gleicher Zahlen, welches aus a und b gewonnen wird, d. h. da dies m und m ist, so ist jenes mc und mc, und ist dies nach No. 78 ebenso das gröste Gemeinmas von ac und bc, wie m das ist von a und b.

80. Wenn eine Zahl c in ein Zeug oder Product zweier Zahlen ab aufgeht und dem einen Fache oder Factor a fremd ist, so geht sie in den andern auf.

Beweis. Es geht c in ab auf (Voraussetzung) und ebenso in cb. Da aber a und c einander fremde sind, so ist ihr gröstes Gemeinmas 1 (nach No. 76), mithin ist das gröste Gemeinmas von ab und cb nach No. 79 die Zahl $1b = b$. Die Zahl c geht, da sie in ab und cb aufgeht, auch nach No. 79 in deren gröstes Gemeinmas, d. h. in b, auf.

81. Erklärung. Eine Zahl, in welche auser Eins und der Zahl selbst keine andere Zahl aufgeht, heist eine Primzahl.

Jede Zahl, welche nicht Primzahl ist, d. h. in die auser der 1 und der Zahl selbst mindestens noch eine Zahl aufgeht, heist eine zusammengesetzte Zahl. Die Fache oder Factoren, welche Primzahlen ungleich Eins sind, heisen Primfache oder Primfactoren.

82. Eine Primzahl a, welche in eine andre Zahl b nicht aufgeht, ist ihr fremd oder primär.

Beweis. Da a Primzahl ist, so geht in sie auser a und 1 keine Zahl auf (No. 81), da aber a in b nicht aufgeht, so geht in a und b nur 1 auf, d. h. a ist der b fremd oder primär (No. 76).

83. Eine Primzahl a, welche in 2 Zahlen b und c nicht aufgeht, geht auch nicht in das Zeug oder Product derselben bc auf.

Beweis (trennend oder indirect). Angenommen, es ginge a in bc auf, so müsste, da a Primzahl ist und in b nicht aufgeht, d. h. da a dem b fremde oder primär ist (No. 82), a in c aufgehen (nach No. 80). Nach dem Satze darf aber a nicht in c aufgehen, also ist die Annahme unmöglich.

84. Wenn eine Primzahl a in mehre Zahlen nicht aufgeht, so geht sie auch nicht in ihr Zeug (Product) auf.

Beweis (fortleitend in Bezug auf die Anzahl der Zahlen $b_1, b_2 \cdots b_n$). Angenommen, der Satz gelte für a Zahlen (dass nämlich, wenn die Primzahl a in $b_1, b_2 \cdots b_a$ nicht aufgeht, sie auch nicht in das Zeug derselben $b_1 b_2 \cdots b_a$ aufgeht), so beweise ich, dass er auch für $a + 1$ Zahlen $b_1, b_2 \cdots b_{a+1}$ gelte. Nach der Voraussetzung geht nämlich die Primzahl a nicht in die Zahlen $b_1, b_2 \cdots b_a$ auf, mithin nach der Annahme auch nicht in deren Zeug $b_1 b_2 \cdots b_a$, aber nach der Voraussetzung geht sie auch nicht in b_{a+1} auf, mithin nach No. 83 auch nicht in das Zeug der beiden Zahlen, d. h. nicht in $b_1 b_2 \cdots b_{a+1}$.

Wenn also der Satz für eine beliebige Reihe von Zahlen gilt, so gilt er auch für die Reihe, welche eine Zahl mehr enthält. Nun gilt er nach No. 83 für zwei Zahlen, also auch allgemein für beliebig viele Zahlen.

85. Jede zusammengesetzte Zahl a lässt sich in Primfache (Primfactoren) zerlegen.

Beweis. 1. Da a eine zusammengesetzte Zahl, so muss nach No. 81 wenigstens eine von 1 und a verschiedene Zahl in sie aufgehen, dies sei b, und es gehe b in sie c mal auf, so muss $c \gtrless 1$ sein, denn sonst wäre $a = 1 \cdot b = b$ wider die Annahme, aber auch $c \gtrless a$, denn sonst wäre $a = a \cdot b$, d. h. $b = 1$ wider die Annahme. Es lässt sich also jede zusammengesetzte Zahl in zwei von 1 und a

verschiedene Fache oder Factoren zerlegen, und diese beiden Fache können nach No. 73 nicht gröser als a, aber, wie eben bewiesen, auch nicht gleich a sein, sie müssen also kleiner sein als a.

2. Ist von den beiden Fachen oder Factoren b und c, in welche a zerlegt wurde, der eine noch eine zusammengesetzte Zahl, so kann man diese (nach Beweis 1) wieder in zwei kleinere, von 1 verschiedene Fache zerlegen u. s. w. Jedes Fach wird hiebei mindestens um 1 kleiner, also muss das Zerlegen in kleinere Fache eine Grenze haben, d. h. die Fache können nicht zusammengesetzte Zahlen bleiben, sondern werden zuletzt lauter Primzahlen.

86. Wenn zwei Zeuge A und B von Primfachen oder Primfactoren gleich sind, so können sich beide nur durch die Ordnung ihrer Fache unterscheiden.

Beweis (fortleitend in Bezug auf die Anzahl der Primfache von A).

1. Angenommen, der Satz gelte, wenn A ein Zeug von n Primfachen $a_1 a_2 \cdots a_n$ ist, so beweise ich, dass er auch gelte, wenn A ein Zeug von $n+1$ Primfachen $a_1 a_2 \cdots a_{n+1}$ ist. Nach der Voraussetzung sind A und B gleich, also muss a_{n+1} in $B = A$ aufgehen, mithin muss es nach No. 84 auch in ein Fach von B aufgehen, dies sei x. Da aber die Fache von B nach der Voraussetzung Primfache sind, so geht in x nur 1 und x auf, und da a_{n+1} als Primfach $\gtrless 1$ ist (No. 81), so muss also $a_{n+1} = x$ sein. Da ferner die Ordnung der Fache nach No. 57 beliebig ist, so setze in B das Fach x auf die letzte Stelle, und sei das Zeug der übrigen Fache C, so ist

$$Ca_{n+1} = Cx = B = A = a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1},$$

mithin nach No. 37

$$C = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

Nach der Annahme gilt nun der Satz für n Fache; es können sich mithin die Fache von C von den Fachen $a_1 a_2 \cdots a_n$ nur durch die Ordnung unterscheiden, also können sich auch die Fache von B von den Fachen $a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}$ von A nur durch die Ordnung unterscheiden, d. h. wenn der Satz für n Fache gilt, so gilt er auch für $n+1$ Fache.

2. Nun gilt er aber, wenn A nur 2 Fache $a_1 a_2$ enthält; denn (nach Beweis 1) muss a_2 eins der Fache von B sein. Es sei $B = Ca_2$, so ist

$$Ca_2 = B = A = a_1 a_2, \qquad \text{also nach No. 37 } C = a_1,$$

mithin $B = a_1 a_2$, d. h. der Satz gilt für zwei Fache, mithin nach Beweis 1 fortleitend auch für beliebig viele Fache.

87. In eine Zahl A können auser 1 keine andern Zahlen als die Primfache von A und deren Zeuge aufgehen.

Beweis. Es seien $a_1, a_2 \cdots a_n$ die Primfache von A, d. h. $A = a_1 a_2 \cdots a_n$, und es gehe eine beliebige Zahl $B \gtrless 1$ in A und zwar C mal auf, so ist auch $A = BC$. Nun zerlege man BC in seine Primfache, so müssen diese den Primfachen $a_1 a_2 \cdots a_n$ gleich sein (nach No. 86), mithin ist B entweder gleich einem dieser Fache oder gleich einem Zeuge derselben.

88. Wenn in eine Zahl a, welche kleiner ist als bb, die Primzahlen, welche kleiner als b sind, nicht aufgehen, so ist sie selbst eine Primzahl.

Beweis (trennend). Angenommen, a sei keine Primzahl, so müssten (nach No. 85) mindestens zwei von 1 und a verschiedene Primzahlen in sie aufgehen, dies seien c und d, also $a = cd$. Da aber nach der Voraussetzung die Primzahlen, welche kleiner als b sind, nicht in a aufgehen, so müssen c und d gröser als b sein, dann aber müsste nach No. 65 auch das Zeug $a = cd$ gröser als bb sein. Dies ist aber wider die Voraussetzung, also kann auch nicht a eine zusammengesetzte Zahl sein, sondern ist eine Primzahl.

89. Erklärung. Die Vielfachen von 2 heisen gerade, die Zahlen, in welche 2 nicht aufgeht, ungerade Zahlen.

90. Erklärung. Die kleinste Zahl, in welche zwei oder mehre gegebene Zahlen aufgehen, heist der kleinste Hauptnenner oder Dividuus dieser Zahlen.

91. Der kleinste Gemeinnenner oder Dividuus zweier gegebenen Zahlen ist das Zeug (Product) aus der ersten Zahl und denjenigen Primfachen der zweiten Zahl, welche der ersten Zahl fehlen, und geht dieser Gemeinnenner in jede Zahl auf, in welche die gegebenen Zahlen aufgehen.

Beweis. Es seien die gegebenen Zahlen a und b, und seien von a die Primfache $a_1 a_2 \cdots a_n$, die dem b eigenthümlichen Primfache, welche dem a fehlen, aber $b_1 b_1 \cdots b_m$, so will ich beweisen, dass $a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m$ der kleinste Gemeinnenner von a und b sei.

Da nach No. 87 in jede Zahl nur die Primfache derselben und deren Zeuge aufgehen, so muss jede Zahl c, in welche a aufgehen soll, auch sämmtliche Primfache $a_1 a_2 \cdots a_n$ von a als Fache enthalten, und jede Zahl, in welche b aufgehen soll, auser den mit a gemeinsamen Fachen auch mindestens sämmtliche dem b eigenthümliche Primzahlen $b_1 b_2 \cdots b_m$ als Fache enthalten, mithin jede Zahl, in welche a und b zugleich aufgehen sollen, sämmtliche Primfache $a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m$ als Fache enthalten.

2. In jede beliebige Zahl c, in welche a und b aufgehen, gehen alfo die Zahlen $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m$ als Primfache, mithin nach No. 87 auch deren Zeug oder Product auf. Da aber eine Zahl, welche in eine andre Zahl aufgeht, nach No. 73 nicht gröser fein kann als letztere, fo giebt es keine Zahl, in die a und b aufgehen, welche kleiner ist als das Zeug $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m$, d. h. dies Zeug ist der kleinste Gemeinnenner jener Zahlen.

92. Den kleinsten Gemeinnenner mehrer Zahlen erhält man, wenn man den kleinsten Gemeinnenner b von 2 Zahlen mit denjenigen Primfachen der dritten Zahl vervielfacht, welche jenem Gemeinnenner b noch fehlen, und fofort den kleinsten Gemeinnenner c von n — 1 Zahlen mit denjenigen Primfachen der nten Zahl vervielfacht, welche jenem Gemeinnenner c noch fehlen; der kleinste Gemeinnenner geht in jede Zahl auf, in welche die gegebenen Zahlen aufgehen.

Beweis. 1. Der Gemeinnenner d erhält durch das angegebene Verfahren von jeder Zahl p nur diejenigen Primfache, welche dem Gemeinnenner bis dahin noch fehlen, follte aber eins diefer Fache fehlen, fo würde die betreffende Zahl in die Zahl d nach No. 87 nicht aufgehen, die Zahl d wäre alfo kein Gemeinnenner, der Gemeinnenner muss mithin alle diefe Primfache enthalten.

2. In jede Zahl, in welche die fämmtlichen gegebenen Zahlen aufgehen, müssen alfo auch fämmtliche Primfache des erhaltenen Gemeinnenners, mithin auch das Zeug derfelben oder der Gemeinnenner felbst nach No. 87 aufgehen. Da aber eine Zahl, welche in eine andre aufgeht, nicht gröser fein kann als letztere (nach No. 73), fo ist auch der erhaltene Gemeinnenner der kleinste Gemeinnenner der gegebenen Zahlen.

93. Das gröste Gemeinmas von n Zahlen erhält man, wenn man jede diefer Zahlen in ihre Primfache (Primfactoren) zerlegt und das Zeug oder Product derjenigen Primfache bildet, welche allen n Zahlen gemeinfam find.

Beweis. Es feien die gegebenen Zahlen $a_1, a_2\cdots a_n$, und feien die allen n Zahlen gemeinfamen Primfache $b_1, b_2\cdots b_m$, fo will ich beweifen, dass $b_1 b_2\cdots b_m$ das gröste Gemeinmas diefer n Zahlen ist. Es können nach No. 87 in jede Zahl nur die Primfache derfelben und deren Zeuge oder Producte aufgehen, es können mithin in alle n Zahlen nur diejenigen Primfache und ihre Zeuge aufgehen, welche allen n Zahlen gemeinfam find, d. h. nach der Vorausfetzung nur $b_1, b_2\cdots b_m$. Von diefen Fachen und ihren Zeugen oder Producten ist aber das Zeug aller diefer Fache

$b_1 b_2 \cdots b_m$ das gröste, denn alle andern Zeuge dieser Fache, welche weniger Fache enthalten, gehen in dasselbe auf und sind mithin nach No. 73 mindestens nicht gröser.

94. Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner einander fremde oder primär sind, heist ein **reducirter** oder **kurzer Bruch**.

Eigenschaften der Brüche.

95. **Erklärung.** Eine Gleichung, in welcher beide Seiten Brüche sind, deren Zähler und Nenner ungleich Null sind, heist eine **Bruchgleichung** oder **Proportion**, jeder Bruch ein **Verhältniss**, das Zeichen derselben ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ oder $a : b = c : d$ (gelesen a durch b, wie c durch d). Die Grösen a und d heisen äusere Grösen, die b und c innere Grösen

96. Jede Bruchgleichung, welche Zahlgrösen enthält, lässt sich in eine Bruchgleichung verwandeln, welche nur Zahlen enthält, und umgekehrt.

Beweis. Entweder können Zähler und Nenner oder blos die Zähler Zahlgrösen sein.

1. Wenn Zähler und Nenner Zahlgrösen enthalten, so ist der Bruch

$$\frac{ea}{eb} = \frac{a}{b} \qquad \text{(nach No. 55).}$$

2. Wenn nur die Zähler Zahlgrösen enthalten, so ist die Bruchgleichung $\frac{ea}{b} = \frac{ec}{b}$. Diese aber ist nach No. 57 gleich

$$e\frac{a}{b} = e\frac{c}{b} \qquad \text{mithin ist auch nach No. 37}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{b}$$

und umgekehrt, wenn gegeben ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{b}$, so ist auch $e\frac{a}{b} = e\frac{c}{b}$ und $\frac{ea}{b} = \frac{ec}{b}$ (nach No. 57).

97. In der Bruchgleichung ist das Zeug oder Product der äusern Grösen gleich dem der innern Grösen, oder

Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (Annahme), so ist $ad = bc$ (Folgerung).

Beweis. Man vervielfache die gegebene Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ mit db, fo ist (nach No. 57) $\frac{adb}{b} = \frac{dbc}{d}$, d. h. (nach No. 54)

$ad = bc$.

98. Wenn zwei Zeuge oder Producte einander gleich, aber ungleich Null find, fo erhält man eine richtige Bruchgleichung, wenn man die beiden Fache oder Factoren des einen Zeuges als äusere, die des andern als innere Grösen fetzt, oder

Wenn $ad = bc$ (Annahme), fo ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (Folgerung).

Beweis. Da ad und bc ungleich Null find, fo ist (nach No. 36) auch b und d, alfo (nach No. 2) auch bd ungleich Null. Man theile die gegebene Gleichung durch bd, fo ist (nach No. 37)

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \text{ und (nach No. 54) gehoben } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

99. In einer Bruchgleichung kann man zwei äusere Grösen gegenfeitig vertauschen, und ebenfo zwei innere Grösen.

Beweis. Es fei gegeben $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alfo ist (nach No. 97) $ad = bc$, mithin ist (nach No. 98) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ und $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ und $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$.

100. Wenn in einer Bruchgleichung eine innere und eine äusere Gröse einander gleich find, fo find auch die beiden andern Grösen einander gleich.

Beweis. Es fei gegeben $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alfo (nach No. 97) $ad = bc$ und es fei $a = c$ (Vorausfetzung), fo ist auch $ad = bc = ba$, mithin (nach No. 37) auch $b = d$.

101. Eine äusere Gröse einer Bruchgleichung erhält man, indem man das Zeug oder Product der innern Grösen durch die andre äusere Gröse theilt, und entsprechend erhält man eine innere Gröse u. f. w.

Beweis. Es fei gegeben $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, fo ist (nach No. 97) $ad = bc$, alfo (nach No. 37 und 54)

$$a = \frac{bc}{d} \text{ und } d = \frac{bc}{a}; \text{ auch } b = \frac{ad}{c} \text{ und } c = \frac{ad}{b}.$$

102. Eine Bruchgleichung bleibt richtig, wenn man in dem einen Bruche statt des Zählers eine beliebige Vielfachenfumme der

beiden Zähler, welche ungleich Null ist, und statt des Nenners die entsprechende Vielfachensumme der beiden Nenner setzt.

Beweis. Es sei die gegebene Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist (nach No. 101) $a = \frac{b}{d}c$. Sei nun $\mathfrak{a}a + \mathfrak{c}c$ eine beliebige Vielfachensumme $\gtrless$ Null von den Zählern a und c, so ist

$$\mathfrak{a}a + \mathfrak{c}c = \mathfrak{a}\frac{b}{d}c + \mathfrak{c}c = \left(\mathfrak{a}\frac{b}{d} + \mathfrak{c}\right)c$$

und (nach 36) $\mathfrak{a}\frac{b}{d} + \mathfrak{c} \gtrless 0$, also ist auch die entsprechende Vielfachensumme der Nenner b und d

$$\mathfrak{a}b + \mathfrak{c}d = \mathfrak{a}\frac{b}{d}d + \mathfrak{c}d = \left(\mathfrak{a}\frac{b}{d} + \mathfrak{c}\right)d,$$

d. h. da $\mathfrak{a}\frac{b}{d} + \mathfrak{c} \gtrless 0$ und $d \gtrless 0$, auch $\gtrless 0$ (nach No. 2). Mithin ist

$$\frac{\mathfrak{a}a + \mathfrak{c}c}{\mathfrak{a}b + \mathfrak{c}d} = \frac{(\mathfrak{a}\frac{b}{d} + \mathfrak{c})\,c}{(\mathfrak{a}\frac{b}{d} + \mathfrak{c})\,d} = \frac{c}{d} \qquad \text{(nach No. 54).}$$

103. Wenn mehre Brüche einander gleich sind, so bleibt die Gleichung richtig, wenn man in dem einen Bruche statt des Zählers eine beliebige Vielfachensumme $\gtrless 0$ der sämmtlichen Zähler und statt des Nenners die entsprechende Vielfachensumme der Nenner setzt.

Beweis. Seien die gegebenen Brüche $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \cdots$ und sei $\mathfrak{a}a + \mathfrak{b}b + \mathfrak{c}c + \cdots \gtrless 0$, so ist, da $a_1 = a\frac{a_1}{a}$, $b_1 = b\frac{a_1}{a}$, $c_1 = c\frac{a_1}{a} \cdots$,

$$\mathfrak{a}a_1 + \mathfrak{b}b_1 + \mathfrak{c}c_1 + \cdots = \mathfrak{a}a\frac{a_1}{a} + \mathfrak{b}b\frac{a_1}{a} + \mathfrak{c}c\frac{a_1}{a} + \cdots$$

$$= (\mathfrak{a}a + \mathfrak{b}b + \mathfrak{c}c + \cdots)\frac{a_1}{a},$$

mithin (nach No. 2) $\gtrless 0$, da $\mathfrak{a}a + \mathfrak{b}b + \mathfrak{c}c + \cdots \gtrless 0$ ist und auch a_1 und $a \gtrless 0$. Es ist also

$$\frac{\mathfrak{a}a + \mathfrak{b}b + \mathfrak{c}c + \cdots}{\mathfrak{a}a_1 + \mathfrak{b}b_1 + \mathfrak{c}c_1 + \cdots} = \frac{\mathfrak{a}a + \mathfrak{b}b + \mathfrak{c}c + \cdots}{(\mathfrak{a}a + \mathfrak{b}b + \mathfrak{c}c + \cdots)\frac{a_1}{a}}$$

$$= \frac{1}{\frac{a_1}{a}} = \frac{a}{a_1} \qquad \text{(nach No. 54 und 53).}$$

104. Eine beliebige Vielfachenfumme ungleich Null aus dem Zähler und Nenner des einen Bruches verhält fich zur entsprechenden Vielfachensumme aus dem Zähler und Nenner jedes gleichen Bruches, wie der Zähler oder Nenner des ersten Bruches zu dem des zweiten.

Beweis. Man vertausche in $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nach No. 99 die innern Grösen, fo erhält man $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ und hat man für jede beliebige Vielfachenfumme $\alpha a + \beta b$ die Gleichung

$$\frac{\alpha a + \beta b}{\alpha c + \beta d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \text{(nach No. 102)}$$

105. Wenn in zwei Bruchgleichungen drei entsprechende Grösen gleich find, fo find auch die vierten gleich.

Beweis. Es fei gegeben $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und $\frac{e}{b} = \frac{c}{d}$, fo ist $\frac{a}{b} = \frac{e}{b}$ mithin (nach No. 100) $a = e$.

106. Zwei und mehre Bruchgleichungen geben zufammengefetzt (d. h. wenn man die entsprechenden Grösen mit einander vervielfacht) wieder eine richtige Bruchgleichung.

Beweis. Es fei gegeben $\frac{a_1}{b_1} = \frac{c_1}{d_1}, \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_2}{d_2} \cdots \frac{a_n}{b_n} = \frac{c_n}{d_n}$, fo ist auch (nach No. 1)

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdots \frac{a_n}{b_n} = \frac{c_1}{d_1} \cdot \frac{c_2}{d_2} \cdots \frac{c_n}{d_n}, \text{ mithin (nach No. 57)}$$

$$\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{b_1 b_2 \cdots b_n} = \frac{c_1 c_2 \cdots c_n}{d_1 d_2 \cdots d_n}.$$

Abschnitt 4.

Der dritte Zählgrad, oder Höhen, Tiefen und Logen.

107. $a^n \doteq P_n(a)$ $\quad$ * n eine ganze Pluszahl

Wenn die Stufe eine ganze Pluszahl n ist, so ist die Höhe ein Zeug, dessen n Fache der Base gleich sind.

Wenn der Exponent eine ganze positive Zahl n ist, so ist die Potenz ein Product, dessen n Factoren der Base gleich sind.

Beweis. Unmittelbar aus No. 2.

108. $0^n \doteq 0$ $\quad$ * n eine ganze Pluszahl.

Null, zu jeder ganzen Pluszahl erhöht, giebt wieder Null.

Null, mit jeder ganzen positiven Zahl potenzirt, giebt wieder Null.

Beweis. Unmittelbar aus No. 2.

109. $1^n \doteq 1 \quad (-1)^{2n} \doteq 1 \quad (-1)^{2n+1} \doteq -1$

* n eine ganze Pluszahl.

Jede Höhe von Pluseins zur ganzen Stufe ist wieder Pluseins, jede Höhe von Stricheins zur geraden Stufe ist Pluseins, zur ungeraden Stufe ist Stricheins.

Jede Potenz von $+1$ mit ganzem Exponenten ist wieder $+1$, jede Potenz von -1 mit geradem Exponenten ist $+1$, mit ungeradem Exponenten ist -1.

Beweis. Unmittelbar aus No. 2 und No. 35 oder in Formeln:

a. $1^n = P_{1,n}(1) = 1$ (nach No. 107 und 2)

b. $(-1)^{2n} = [(-1)^2]^n$ (nach No. 2)

$= [(-1)(-1)]^n$ (nach No. 2)

$= 1^n = 1$ (nach No. 35 und 2)

c. $(-1)^{2n+1} = (-1^{2n})(-1)$ (nach No. 2)

$= 1 \cdot (-1) = -1$ (nach No. 109b und 2).

110. $(+a)^n \doteq +(a^n) \quad (-a)^{2n} \doteq +(a^{2n}) \quad (-a)^{2n+1} \doteq -(a^{2n+1})$

* n eine ganze Pluszahl.

Jede Höhe einer Pluszahl zur ganzen Stufe ist wieder eine Pluszahl. Jede Höhe einer Strichzahl

Jede Potenz einer positiven Zahl mit ganzem Exponenten ist eine positive Zahl. Jede Potenz

zur geraden Stufe ist eine Pluszahl, zur ungeraden Stufe eine Strichzahl.

einer negativen Zahl mit geradem Exponenten ist eine positive Zahl, mit ungeradem Exponenten eine negative Zahl.

Beweis. Unmittelbar aus No. 2 und No. 35 oder in Formeln:

a. $(+a)^n = (+1\cdot a)^n = (+1)^n\, a^n = +1\,(a^n) = +a^n.$

b. $(-a)^{2n} = ((-1)\cdot a)^{2n} = (-1)^{2n}\cdot a^{2n} = +1\,(a^{2n}) = +(a^{2n}).$

c. $(-a)^{2n+1} = ((-1)\cdot a)^{2n+1} = (-1)^{2n+1}\cdot a^{2n+1} = -1\,(a^{2n+1})$
$= -(a^{2n+1}).$

111. Höhen (Potenzen) von entgegengesetzter Base zu gleicher Stufe sind einander gleich, wenn die Stufe gerade, entgegengesetzt, wenn sie ungerade ist.

Beweis. Unmittelbar aus No. 110.

112. $a^{-n} \doteq \frac{1}{a^n} \qquad a^n \doteq \frac{1}{a^{-n}}$ $\quad$ • $a \gtrless 0$, n eine ganze Zahl.

Wenn die Base ungleich Null ist, so sind die Höhen oder Potenzen zur entgegengesetzten Stufe die umgekehrten Werthe von einander.

Beweis. $a^{-n} = \frac{a^{-n}\cdot a^n}{a^n}$ (nach No. 49)

$= \frac{a^{-n+n}}{a^n}$ (nach No. 2)

$= \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$ (nach No. 15 und No. 2).

113. $a^{b-c} \doteq \frac{a^b}{a^c}$ $\quad$ • $a \gtrless 0$, b und c ganze Zahlen.

Wenn die Base ungleich Null ist, so kann man, statt mit einem Unterschiede zu erhöhen, auch mit den Gliedern einzeln erhöhen und die Höhen entsprechend theilen, und

kann man, statt Höhen von gleicher Base zu theilen, auch die Stufen entsprechend abziehen.

Beweis. $a^{b-c} = a^{b-c}\cdot a^c : a^c$ (nach No. 49)

$= a^{b-c+c} : a^c$ (nach No. 2)

$= a^b : a^c$ (nach No. 16).

114. $\left(\frac{a}{b}\right)^c \doteq \frac{a^c}{b^c}$ $\quad$ • $b \gtrless 0$, c eine ganze Pluszahl.

Einen Bruch erhöht man zu einer Zahlgröse, indem man Zähler und Nenner einzeln erhöht, und

Statt Zähler und Nenner eines Bruches einzeln zu erhöhen, kann man den ganzen Bruch erhöhen.

Beweis. $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \left(\frac{a}{b}\right)^c \cdot b^c : b^c$ (nach No. 49)

$= \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)^c : b^c$ (nach No. 2)

$= a^c : b^c$ (nach No. 49).

115. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-c} \doteq \left(\frac{b}{a}\right)^c$ ∘ a und $b \gtrless 0$, c eine ganze Zahl.

Einen Bruch erhöht man zu einer Strichzahl, indem man den Bruch umkehrt und zu der entsprechenden Pluszahl erhöht.

Beweis. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-c} = 1 : \left(\frac{a}{b}\right)^c$ (nach No. 112)

$= 1 : \frac{a^c}{b^c}$ (nach No. 114)

$= \frac{b^c}{a^c}$ (nach No. 53)

$= \left(\frac{b}{a}\right)^c$ (nach No. 114).

116. Jeder ächte Plusbruch giebt, mit einer ganzen Pluszahl erhöht, einen ächten Bruch, mit einer ganzen Strichzahl erhöht, eine Höhe gröser als Eins, und

Jede Zahl gröser als Eins giebt, mit einer ganzen Pluszahl erhöht, eine Höhe gröser als Eins, mit einer ganzen Strichzahl erhöht, einen ächten Bruch.

Jeder positive ächte Bruch giebt, mit einer ganzen positiven Zahl potenzirt, einen ächten Bruch, mit einer ganzen negativen potenzirt, eine Potenz gröser als 1, und

Jede Zahl gröser als 1 giebt, mit einer ganzen positiven Zahl potenzirt, eine Potenz gröser als 1, mit einer ganzen negativen potenzirt, einen ächten Bruch.

Beweis. 1. Wenn die Stufe eine Pluszahl ist, so folgt der Satz unmittelbar aus No. 69.

2. Wenn dagegen die Stufe eine Strichzahl ist, so sei $b > a$ und beide Zahlen Pluszahlen, dann ist $\frac{a}{b}$ ein ächter Bruch, nach No. 68, dagegen $\frac{b}{a}$ gröser als eins, denn $\frac{b}{a} - 1 = \frac{b-a}{a}$ eine Pluszahl, da $b - a$ eine Pluszahl, nach No. 24, und a desgleichen, also $\frac{b}{a}$ gröser als 1 (nach No. 24). Nun ist aber $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ nach No. 115, mithin giebt ein ächter Plusbruch, mit einer Strichzahl erhöht, dasselbe, was eine Zahl gröser als 1, mit einer Pluszahl erhöht, d. h. nach No. 116. 1 eine Zahl gröser als 1. Ebenso

ist nach No. 115 $\left(\frac{b}{a}\right)^{-n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n}$, mithin giebt eine Zahl gröser als 1, mit einer Strichzahl erhöht, dasſelbe, was ein ächter Bruch giebt, mit einer Pluszahl erhöht, d. h. nach No. 116. 1 einen ächten Bruch.

117. Wenn eine Pluszahl a mit einer beliebigen ganzen Zahl ungleich Null erhöht, Eins geben ſoll, ſo muss ſie Eins ſein.

Beweis. Trennend (indirect). Jede Pluszahl ist nach No. 25 entweder gleich Eins, oder gröser oder kleiner als 1.

Angenommen nun, a ſei gröser als Eins, oder es ſei kleiner als Eins, d. h. ein ächter Bruch, nach No. 68, ſo ist, da die Stufe ungleich Null ist, die Stufe nach No. 5 entweder eine Pluszahl oder eine Strichzahl, d. h. die Höhe nach No. 116 entweder gröser als 1 oder kleiner als 1, d. h. jedenfalls nicht gleich Eins. Die Pluszahl darf alſo weder gröser noch kleiner als 1 ſein, d. h. ſie ist gleich Eins (nach No. 25).

118. Wenn eine Pluszahl ungleich eins mit einer ganzen Zahl b erhöht Eins giebt, ſo ist die letztere Null.

Beweis. Trennend (indirect). Jede Zahl b ist nach No. 5 entweder Null oder eine Plus- oder eine Strichzahl. Angenommen nun, die Stufe b ſei eine Pluszahl, oder ſei eine Strichzahl, ſo ist, da die Baſe ungleich 1 ist, die Baſe nach No. 25 entweder gröser als 1, oder kleiner als 1, mithin auch nach No. 116 die Höhe, welche man erhält, wenn man die Baſe mit einer Pluszahl oder mit einer Strichzahl erhöht, entweder gröser oder kleiner als 1, d. h. jedenfalls nicht gleich Eins. Die Stufe oder der Exponent darf alſo weder eine Pluszahl, noch eine Strichzahl ſein, ſie muss alſo nach No. 5 Null ſein. Ist aber $b = 0$, ſo ist, was auch a für eine Gröse ſei, $a^b = a^0 = 1$ (nach No. 2).

119. Zwei Pluszahlen a und b, welche zu derſelben ganzen Zahl c ungleich Null erhöht dieſelbe Höhe oder Potenz geben, ſind einander gleich, und

Zwei ganze Zahlen c und d, zu welchen dieſelbe Pluszahl a ungleich Eins erhöht, dieſelbe Höhe geben, ſind auch einander gleich.

Beweis. 1. Es ſei $a^c = b^c$ und a und b Pluszahlen und $c \gtrless 0$, ſo ist $1 = \frac{b^c}{b^c} = \frac{a^c}{b^c}$ (nach No. 47)

$= \left(\frac{a}{b}\right)^c$ (nach No. 114)

mithin ist, da $c \gtrless 0$ ist; $\frac{a}{b} = 1$, nach No. 117, d. h. $a = b$, nach No. 47.

2. Es sei $a^c = a^d$ und a eine Pluszahl ungleich Eins, so ist

$$1 = \frac{a^c}{a^c} = \frac{a^c}{a^d} \quad \text{(nach No. 47)}$$

$$= a^{c-d} \quad \text{(nach No. 113)},$$

mithin, da $a \gtrless 1$ ist, so ist nach No. 118 $c - d = 0$, d. h. $c = d$ (nach No. 15).

120. Erklärung. Die Tiefe (Radix) $a^{\frac{1}{n}}$ (gelesen a zur $\frac{1}{n}$tel oder a tief n) ist diejenige Plusgröse, welche mit der ganzen Zahl n erhöht oder potenzirt die Zahlgröse a giebt, sofern a eine Plusgröse und $n \gtrless 0$ ist.

Die erste Gröse a heist Tiefzahl oder Radicand, die zweite Gröse n heist die Senke oder der Radicator, das Aufsuchen der Tiefe heist Tiefen oder Radiciren.

121. $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a.$

Mit einer ganzen Zahl fortschreitend tiefen und höhen (radiciren und potenziren) ändert nichts.

122. $(a^n)^{\frac{1}{n}} = a.$

Mit einer ganzen Zahl fortschreitend höhen und tiefen (potenziren und radiciren) ändert nichts.

Beweis. $\left[(a^n)^{\frac{1}{n}}\right]^n = a^n$ (nach No. 121),

mithin, da a und $(a^n)^{\frac{1}{n}}$ Pluszahlen und n eine ganze Zahl ist, so ist

$$(a^n)^{\frac{1}{n}} = a \text{ (nach No. 119)}.$$

123. $1^{\frac{1}{n}} = 1.$

Die nte Tiefe aus Eins ist wieder 1.

Beweis. $1^{\frac{1}{n}} = (1^n)^{\frac{1}{n}}$ (nach No. 109)

$= 1$ (nach No. 122).

124. Für das Tiefen oder Radiciren gelten alle Gesetze der Erhöhung.

Beweis. Da die Tiefe $a^{\frac{1}{n}}$ nur einen Werth hat (wenn a nur einen Werth hat) und also eine Zahlgröse ist, so folgt es unmittelbar aus No. 2.

125. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$.

Einen Bruch tieft (radicirt) man, indem man Zähler und Nenner tieft.

Beweis. Unmittelbar aus No. 114.

126. $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

Zu einem Bruche erhöht man, indem man die Bafe fortschreitend zu dem Zähler und Nenner oder fortscheitend zu dem Nenner und Zähler erhöht.

Beweis $a^{\frac{m}{n}} = a^{\left(\frac{m}{n}\right)} = a^{\left(m\frac{1}{n}\right)}$ (nach No. 42)

$= (a^m)^{\frac{1}{n}}$ (nach No. 2)

und $a^{\frac{m}{n}} = a^{\left(\frac{m}{n}\right)} = a^{\left(\frac{1}{n}m\right)}$ (nach No. 42)

$= \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ (nach No. 2).

127. Erklärung. Der Log (Logarithmus) $\underset{b}{\overset{a}{-}}$ oder log $\underset{b}{\overset{a}{-}}$ (gelefen a nach b oder Log a nach b) ist diejenige Zahlgröse c, mit welcher b erhöht oder potenzirt, a giebt, oder für welche $b^c = a$ ist, fofern a und b Pluszahlen und $b \gtrless 1$ ist.

Die Gröse a heist die Logzahl (numerus logarithmi), die Gröse b heist die Logbafe (basis logarithmi), das Auffuchen des Logs heist logen oder logarithmiren.

128. $\underset{b}{\overset{b^c}{-}} = c$.

Der Log einer Höhe der Bafe ist gleich der Stufe diefer Höhe.

Der Logarithmus einer Potenz der Logarithmen-Bafe ist gleich dem Exponenten diefer Potenz.

Beweis. Unmittelbar nach No. 127.

129. $\underset{b}{\overset{1}{-}} = 0$.

Der Log (Logarithmus) von Eins ist Null.

Beweis. Es ist $1 = b^0$ (nach No. 118)

mithin ist $\underset{b}{\overset{1}{-}} = \underset{b}{\overset{b^0}{-}} = 0$ (nach No. 128).

130. $\underset{b}{\overset{b}{-}} = 1$.

Der Log (Logarithmus) der Bafe ist Eins.

131. $$\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Der Log eines Zeuges ist die Summe aus den Logen der Fache, und die Summe zweier Loge ist gleich dem Loge des Zeuges ihrer Zahlen.

Der Logarithmus eines Productes ist die Summe aus den Logarithmen der Fache, und die Summe zweier Logarithmen ist gleich dem Logarithmus des Products ihrer Numeri.

Beweis. Es sei $a = c^a$ und $b = c^b$, so ist

$$\frac{ab}{c} = \frac{c^a\, c^b}{c} = \frac{c^{a+b}}{c} \qquad \text{(nach No. 2)}$$

$$= a + b \qquad \text{(nach No. 128)}$$

$$= \frac{c^a}{c} + \frac{c^b}{c} \qquad \text{(nach No. 128)}$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

132. $$\frac{a:b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

Den Log (Logarithmus) eines Bruches erhält man, indem man den Log des Nenners von dem des Zählers abzieht, oder der Unterschied zweier Loge (Logarithmen) ist gleich dem Log eines Bruches, dessen Zähler die erste, und dessen Nenner die zweite Logzahl (Numerus) ist.

Beweis. Es ist $$\frac{a:b}{c} = \frac{a:b}{c} + \frac{b}{c} - \frac{b}{c} \qquad \text{(nach No. 11)}$$

$$= \frac{(a:b)\cdot b}{c} - \frac{b}{c} \qquad \text{(nach No. 131)}$$

$$= \frac{a}{c} - \frac{b}{c} \qquad \text{(nach No. 49)}.$$

133. $$\frac{a^b}{c} = b\cdot\frac{a}{c}.$$

Der Log einer Höhe oder Potenz ist gleich der Stufe der Höhe mal dem Loge der Base, und statt eine Zahl zur nten Stufe zu erhöhen, kann man den Log der Zahl mit n vervielfachen.

Beweis. Es sei $a = c^a$, so ist

$$\frac{a^b}{c} = \frac{(c^a)^b}{c} = \frac{c^{(ba)}}{c} \qquad \text{(nach No. 2)}$$

$$= ba \qquad \text{(nach No. 128)}$$

$$= b\cdot\frac{c^a}{c} \qquad \text{(nach No. 128)}$$

$$= b\cdot\frac{a}{c}.$$

134. $$\frac{a^{\frac{1}{b}}}{c} = \frac{1}{b} \cdot \frac{a}{c}.$$

Der Log einer Tiefe (Radix) ist gleich dem Loge der Tiefzahl (Radicand), getheilt durch die Senke (den Radicator).

Beweis. Unmittelbar aus No. 133.

135. $$\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}.$$

Der Log einer Zahl a nach der Base c ist gleich dem Loge jener Zahl nach der zweiten Base b mal dem Loge dieser Zahl b nach der ersten Base c.

Beweis. Es sei $a = b^a$ und $b = c^b$, so ist

$$\frac{a}{c} = \frac{b^a}{c} = \frac{(c^b)^a}{c} = a \cdot \frac{c^b}{c} \quad \text{(nach No. 133)}$$

$$= \frac{b^a}{b} \cdot \frac{c^b}{c} \quad \text{(nach No. 128)}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}.$$

136. $$\frac{a}{c} = \frac{a}{b} : \frac{c}{b}.$$

Der Log einer Zahl a nach der Base c ist gleich einem Bruche, dessen Zähler der Log jener Zahl a, und dessen Nenner der Log jener Base c ist, beide nach einer neuen Base b genommen.

Beweis. Es ist $\frac{a}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} : \frac{c}{b}$ (nach No. 49)

$$= \frac{a}{b} : \frac{c}{b} \quad \text{(nach No. 135)}$$

137. Erklärung. Ganze Zahlen und Bruchzahlen nennt man Endzahlen oder Rationalzahlen. Solche Grösen hingegen, welche nicht Endzahlen sind, für welche aber alle Vergleichungssätze in demselben Umfange gelten, wie für Endzahlen, heisen Unzahlen oder Irrationalzahlen.

138. Alle Sätze der Zahlenlehre, welche für beliebige ganze und Bruchzahlen gelten, gelten auch für die Unzahlen oder Irrationalzahlen.

Vergleichung von Höhen, Tiefen und Logen.

139. Eine Vergleichung zweier Pluszahlen ändert sich nicht, wenn man sie mit gleichen Pluszahlen erhöht oder tieft.

Beweis. Es sei gegeben $a > b$, wo a und b Pluszahlen. Sei nun c eine ganze Pluszahl, so ist

1. $a^c > b^c$ (nach No. 65),

2. ſo ist auch $a^{\frac{1}{c}} > b^{\frac{1}{c}}$; denn wäre $a^{\frac{1}{c}} < b^{\frac{1}{c}}$, ſo wäre auch $\left(a^{\frac{1}{c}}\right)^c < \left(b^{\frac{1}{c}}\right)^c$ (nach Fall 1), d. h. es wäre $a < b$ gegen die Annahme, wäre ferner $a^{\frac{1}{c}} = b^{\frac{1}{c}}$, ſo wäre auch $a = b$ (nach Fall 1), dies aber ist gleichfalls gegen die Annahme, alſo ist auch $a^{\frac{1}{c}} > b^{\frac{1}{c}}$,

3. ſo ist auch $a^{\frac{d}{c}} > b^{\frac{d}{c}}$, ſofern d und c ganze Pluszahlen ſind (nach Fall 1 und 2).

140. Eine Vergleichung zweier Pluszahlen ändert ſich nicht, wenn man gleiche Zahlen, welche gröser als Eins ſind, zu ihnen erhöht, und wenn man ſie nach gleichen Zahlen gröser als Eins logt.

Beweis. Es ſei gegeben $a > b$, wo a und b Pluszahlen, und ſei $c > 1$, ſo ist

1. $c^a > c^b$, denn nach No. 24 ist $a - b$ eine Pluszahl, alſo nach No. 116 ist $c^{a-b} > 1$, und da c^b eine Pluszahl, ſo ist auch $c^a > c^b$ nach No 63.

2. $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$; denn es ſei $a = c^{\mathfrak{a}}$ und $b = c^{\mathfrak{b}}$, ſo würde, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ wäre, auch $c^{\mathfrak{a}} = c^{\mathfrak{b}}$ ſein (nach No 139), ſollte aber $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ ſein, ſo wäre nach No. 140. 1 auch $c^{\mathfrak{a}} < c^{\mathfrak{b}}$, d. h. $a < b$. Da nun $a > b$ ſein ſoll, ſo muss alſo auch $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$ ſein, und da $\frac{a}{c} = \mathfrak{a}$ und $\frac{b}{c} = \mathfrak{b}$, ſo ist alſo auch $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

141. Die Loge (Logarithmen) aller Zahlen, welche gröser als Eins ſind, ſind Pluszahlen, die Loge aller Pluszahlen, welche kleiner als Eins ſind, d. h. aller ächten Brüche, ſind Strichzahlen.

Beweis. Die Loge von 1 ſind Null (nach No. 129). Alle Zahlen, welche gröser als Eins ſind, haben aber nach No. 140 Loge, welche gröser als der Log von 1, d. h. gröser als Null ſind, oder ſie ſind Pluszahlen; alle Pluszahlen, welche kleiner als 1 ſind, haben Loge, welche kleiner als der Log von 1, d. h. kleiner als 0 ſind, oder ſie ſind Strichzahlen.

Eigenschaften von Höhen, Tiefen und Logen.

142. Wenn eine Primzahl p in eine Höhe a^b, deren Baſe und Stufe ganze Pluszahlen ſind, aufgeht, ſo geht ſie auch in die Baſe auf.



Beweis. Angenommen, p gehe nicht in a auf, ſo geht es (nach No. 84) auch nicht in das Zeug von b Fachen oder Factoren a auf, d. h. (nach No. 2) nicht in a^b, was gegen die Vorausſetzung des Satzes ist. Alſo ist die Annahme, dass p nicht in a aufgeht, unmöglich, d. h. p geht in a auf.

143. Wenn zwei Zahlen (a und b) einander fremde oder primär ſind, ſo ſind auch ihre Höhen zu ganzer Stufe n einander fremde oder primär.

Beweis. Angenommen, es ſeien a^n und b^n nicht einander fremde, ſo müssten beide ein gemeinſames Mas c haben (nach No. 76), das gröser als Eins ist. Sei d ein Primfach dieſes c und gröser als 1, ſo müsste auch d in a^n und b^n aufgehen (nach No. 75), mithin (nach No. 142) auch in a und b aufgehen, d. h. a und b wären einander nicht fremde, was gegen die Vorausſetzung des Satzes ist. Alſo ist die Annahme, dass a^n und b^n einander nicht fremde ſeien, unmöglich, d. h. a^n und b^n ſind einander fremde oder primär.

144. Die nte Tieſe einer ganzen Pluszahl a ist entweder eine ganze Zahl oder eine Unzahl (Irrationalzahl); aber kein Bruch.

Beweis. Angenommen, $a^{\frac{1}{n}}$ ſei ein Bruch, und ſei derſelbe kurz oder reducirt $\frac{b}{c}$, ſo wäre $a^{\frac{1}{n}} = \frac{b}{c}$, mithin $a = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(\frac{b}{c}\right)^n = \frac{b^n}{c^n}$ oder $ac^n = b^n$. Da nun b und c einander fremde ſind (nach No. 94), ſo ſind auch b^n und c^n einander fremde (nach No. 143), mithin (nach No. 80) $b^n = a$, d. h. $c^n = 1$, alſo auch $c = (c^n)^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{n}} = 1$ (nach No. 123). Alſo ist $a^{\frac{1}{n}} = \frac{b}{c} = \frac{b}{1} = b$, was gegen die Annahme ist, alſo ist die Annahme unmöglich, und $a^{\frac{1}{n}}$ ist kein Bruch, ſondern entweder eine ganze Zahl oder eine Unzahl (Irrationalzahl).

Abschnitt 5.

Endliche Reihen oder Höhenreihen und Reihenzahlen.

A. Endliche Höhenreihen oder Potenzreihen.

145. Erklärung. Eine Formel, deren Glieder Zeuge find einer Vorzahl oder eines Coefficienten in eine Höhe einer Bafe x, und bei welcher alle Glieder, welche dieselbe Höhe von x enthalten, in ein Glied zusammengefasst, die Glieder aber nach der Stufe von x geordnet find, heist eine Höhenreihe oder Potenzreihe von x.

Kommt eine Höhe von x in der Höhenreihe nicht vor, fo fagt man, ihre Vorzahl sei Null.

In zwei Höhenreihen gleicher Bafe nennt man die zu gleicher Stufe gehörigen Vorzahlen einander entsprechend.

Die Form einer Höhenreihe von x ist $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots$

146. Zwei Höhenreihen (Potenzreihen) gleicher Bafe fügt man zu, indem man die entsprechenden Vorzahlen (Coefficienten) zufügt, und die zugehörigen Höhen unverändert lässt, d. h. es ist

$$(ax^n + bx^{n-1} + \cdots) + (\mathfrak{a}x^n + \mathfrak{b}x^{n-1} + \cdots)$$
$$= (a + \mathfrak{a})\,x^n + (b + \mathfrak{b})\,x^{n-1} + \cdots$$

Beweis. Unmittelbar aus No. 2.

147. Von einer Höhenreihe (Potenzreihe) zieht man eine Höhenreihe gleicher Bafe ab, indem man von jeder Vorzahl (Coefficienten) der erstern die entsprechende der letztern abzieht und die zugehörigen Höhen unverändert lässt, d. h. es ist

$$(ax^n + bx^{n-1} + \cdots) - (\mathfrak{a}x^n + \mathfrak{b}x^{n-1} + \cdots)$$
$$= (a - \mathfrak{a})\,x^n + (b - \mathfrak{b})\,x^{n-1} + \cdots$$

Beweis. Unmittelbar aus No. 22.

48. Eine Höhenreihe (Potenzreihe) der Bafe x vervielfacht man mit $\mathfrak{a}x^m$, indem man jede Vorzahl derfelben mit $\mathfrak{a}$ vervielfacht und zu jeder Stufe m zufügt, d. h. es ist

$$(ax^n + bx^{n-1} + \cdots)\,\mathfrak{a}x^m = a\mathfrak{a}x^{m+n} + b\mathfrak{a}x^{m+n-1} + \cdots$$

Beweis. Unmittelbar aus No. 2.

149. Eine Höhenreihe (Potenzreihe) der Bafe **x theilt man** durch ax^m, indem man jede **Vorzahl** derfelben durch a theilt und von der Stufe m abzieht, d. h. es ist

$$(ax^n + bx^{n-1} + \cdots) : (ax^m) = \frac{a}{a}x^{n-m} + \frac{b}{a}x^{n-m-1} + \cdots$$

Beweis. Unmittelbar aus No. 58 und 113.

150. Zwei Höhenreihen (Potenzreihen) gleicher Bafe vervielfacht man mit einander, indem man die eine derfelben mit jedem Gliede der andern vervielfacht und die erhaltenen Höhenreihen zufügt, d. h. es ist

$$\begin{aligned}(ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots)(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \cdots)\\ = aax^{n+m} + bax^{n+m-1} + cax^{n+m-2} + \cdots\\ + abx^{n+m-1} + bbx^{n+m-2} + \cdots\\ + acx^{n+m-2} + \cdots\\ = aax^{n+m} + (ba + ab)x^{n+m-1} + (ca + bb + ac)x^{n+m-2} + \cdots\end{aligned}$$

Beweis. Unmittelbar aus No. 2.

151. Wenn man zwei Höhenreihen gleicher Bafe mit einander vervielfacht, fo erhält man die zu einer Stufe p gehörige Vorzahl, indem man je zwei Vorzahlen, deren Stufen p zur Summe haben, mit einander vervielfacht und die erhaltenen Zeuge zufügt.

152. Eine Höhenreihe A theilt man durch eine zweite B, indem man das erste Glied der erstern durch das erste Glied der zweiten theilt und das Ergebniss C als erstes Glied des Bruches fetzt. Indem man dann mit diefem Gliede C den ganzen Nenner B vervielfacht, das erhaltene Zeug von dem Zähler A abzieht, den Rest demnächst aufs neue durch den Nenner B theilt und den auf gleiche Weife gefundenen Bruch zu dem zuerst gefundenen zufügt, d. h. es ist

$$\frac{A}{B} = C + \frac{A - BC}{B}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\frac{A}{B} &= \frac{A + BC - BC}{B} && \text{(nach No. 16)}\\ &= \frac{BC + A - BC}{B} && \text{(nach No. 2)}\\ &= \frac{BC}{B} + \frac{A - BC}{B} && \text{(nach No. 59)}\\ &= C + \frac{A - BC}{B} && \text{(nach No. 49).}\end{aligned}$$

B. Zahlenreihen und Stufenreihen oder arithmetische und geometrische Reihen.

153. Erklärung. Wenn in einer Reihe von Zahlen jede von der nächstfolgenden abgezogen denselben Unterschied giebt, so heist die Reihe eine Zahlenreihe erster Ordnung (arithmetische Reihe erster Ordnung), und wenn in einer Reihe von Zahlen jede durch die nächst vorhergehende getheilt denselben Bruch giebt, so heist die Reihe eine Stufenreihe erster Ordnung (geometrische Reihe erster Ordnung).

Es bezeichnen in der Zahlenreihe erster Ordnung $\mathfrak{a}$ das erste, $\mathfrak{t}$ das nte Glied, $\mathfrak{b}$ den Unterschied zweier folgender Glieder, $\mathfrak{S}$ die Summe der n ersten Glieder, und ebenso in der Stufenreihe erster Ordnung a das erste, t das nte Glied, b den Bruch zweier folgender Glieder oder den Folgebruch, S die Summe der n ersten Glieder.

154. Für die Zahlenreihe (arithmetische Reihe) erster Ordnung hat man dann folgende Formeln

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{a} + (n-1)\mathfrak{b} \qquad \mathfrak{S} = \frac{n(\mathfrak{a}+\mathfrak{t})}{2} \qquad \mathfrak{S} = n\mathfrak{a} + \frac{n(n-1)}{2}\mathfrak{b}.$$

Die Summe einer Zahlenreihe erster Ordnung erhält man, indem man die halbe Summe des ersten und letzten Gliedes mit der Anzahl sämmtlicher Glieder vervielfacht.

Beweis. 1. Die erste Formel folgt unmittelbar aus der Erklärung No. 153.

2. Um die Summe zu finden, schreibt man die Reihe zweimal in entgegengesetzter Folge auf und fügt die unter einander stehenden Glieder einander zu, dann ist

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) + (\mathfrak{a}+2\mathfrak{b}) + \cdots + (\mathfrak{t}-\mathfrak{b}) + \mathfrak{t}$$
$$\mathfrak{S} = \mathfrak{t} + (\mathfrak{t}-\mathfrak{b}) + (\mathfrak{t}-2\mathfrak{b}) + \cdots + (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) + \mathfrak{a}$$
$$2\mathfrak{S} = (\mathfrak{a}+\mathfrak{t}) + (\mathfrak{a}+\mathfrak{t}) + (\mathfrak{a}+\mathfrak{t}) + \cdots + (\mathfrak{a}+\mathfrak{t}) + (\mathfrak{a}+\mathfrak{t}) = n(\mathfrak{a}+\mathfrak{t}),$$

d. h. $\mathfrak{S} = \frac{n(\mathfrak{a}+\mathfrak{t})}{2}$,

und führt man den Werth von $\mathfrak{t}$ aus der ersten Formel ein, so erhält man die dritte.

155. Die Summe sämmtlicher ganzen Zahlen von 1 bis n ist $\frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis. Unmittelbar aus No. 154, da $\mathfrak{t} = n$ die Anzahl der Glieder ist.

156. Die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis $(2n-1)$ ist n^2.

Beweis. $\mathfrak{S} = \frac{n(a+t)}{2} = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2$.

157. Für die Stufenreihe (geometrische Reihe) erster Ordnung hat man folgende Formeln

$$t = ab^{n-1} \qquad S = \frac{tb-a}{b-1} \qquad S = a\frac{b^n-1}{b-1} = a\frac{1-b^n}{1-b}.$$

Die Summe einer Stufenreihe erster Ordnung erhält man, indem man das erste Glied mit dem Unterschiede aus der Eins und der nten Höhe des Folgebruches vervielfacht und durch den Unterschied aus der Eins und dem Folgebruche theilt.

Beweis. 1. Die erste Formel folgt unmittelbar aus der Erklärung No. 153.

2. Um die Summe zu finden, schreibt man die Reihe zweimal in gleicher Folge, aber das zweite mal mit b vervielfacht und zieht die erste von der zweiten ab, dann hat man

$$S = a + ab + ab^2 + \cdots + t$$
$$Sb = \quad ab + ab^2 + \cdots + t + tb$$
$$Sb - S = tb - a, \text{ mithin}$$
$$S = \frac{tb-a}{b-1}.$$

Die dritte Formel erhält man, wenn man den Werth von t aus der ersten Formel einführt und die letzte Formel, wenn man Zähler und Nenner mit -1 vervielfacht.

Anwendung: Zins- und Rentenrechnung.

158. Wenn das Vermögen 1 nach einem Jahre $1 + \frac{p}{100}$ wird, so nennt man p den Zinsfus, $z = 1 + \frac{p}{100}$ das Zinsfach (den Zinsfactor) und bezeichnet $\frac{p}{100}$ durch p %.

Wenn am Anfange jedes Jahres eine gleiche Summe ausgezahlt wird, so heist diese eine Jahresrente.

159. Das Vermögen (Kapital) k hat nach n Jahren bei dem Zinsfache z den Werth x, wo

$$x = kz^n.$$

Beweis. Unmittelbar aus der Erklärung No. 158.

160. Ein Vermögen k hatte vor n Jahren bei dem Zinsfache z den Werth x, wo

$$x = kz^{-n}.$$

Beweis. Nach No. 159 ist $k = xz^n$, mithin $x = \frac{k}{z^n} = kz^{-n}$.

161. Die Jahresrente a giebt nach n Jahren ein Vermögen x_1 wo
$$x = az\frac{z^n - 1}{z - 1}.$$

Beweis. Der erste Beitrag steht n Jahre und verwandelt fich alfo in az^n (nach No. 159), der letzte steht ein Jahr und wird az, die Summe aller diefer Werthe ist mithin
$$x = az^n + az^{n-1} + \cdots + az^2 + az = az\frac{z^n - 1}{z - 1} \text{ (nach No. 157).}$$

162. Wie gros muss gegenwärtig ein Vermögen x fein, wenn daraus n Jahre die Jahresrente r gezahlt werden foll? Antwort:
$$x = r\frac{z^n - 1}{(z - 1)z^{n-1}}.$$

Beweis. Die erste Rente r wird fofort gezahlt, die zweite r nach einem Jahre, fie hat alfo gegenwärtig den Werth rz^{-1} (nach No. 160), die nte r nach $n - 1$ Jahren, fie hat alfo gegenwärtig den Werth $rz^{-(n-1)}$, mithin ist
$$x = r + rz^{-1} + rz^{-2} + \cdots + rz^{-(n-1)}$$
$$= (rz^n + rz^{n-1} + rz^{n-2} + \cdots + rz) : z^n$$
$$= \frac{rz}{z^n}\frac{z^n - 1}{z - 1} = r\frac{z^n - 1}{(z - 1)z^{n-1}}.$$

163. Wie gros muss der jährliche Beitrag x fein, der n Jahre gezahlt wird, wenn man dafür q Jahre die Jahresrente r erhalten will und die erste Jahresrente ein Jahr nach dem letzten Beitrage gezahlt wird? Antwort:
$$x = \frac{r}{z^q} \cdot \frac{z^q - 1}{z^n - 1}.$$

Beweis. Der jährliche Beitrag x ist (nach No. 161) nach n Jahren $xz\frac{z^n - 1}{z - 1}$, und dies muss (nach No. 162) gleich $r\frac{z^q - 1}{(z - 1)z^{q-1}}$ fein, alfo ist
$$xz\frac{z^n - 1}{z - 1} = r\frac{z^q - 1}{(z - 1)z^{q-1}}, \text{ d. h.}$$
$$x = \frac{r}{z^q} \cdot \frac{z^q - 1}{z^n - 1}.$$

C. Reihenzahlen (Systemzahlen).

164. Erklärung. Eine Höhenreihe heist eine Reihenzahl (Systemzahl), wenn die Bafe x eine ganze Zahl gröser als Eins,

die Vorzahlen (Coefficienten) aber ganze Zahlen von 0 bis $x - 1$ ſind. Die Baſe heist dann die **Grundzahl**. Man schreibt die Reihenzahl, indem man nach der Reihe die Vorzahlen von der höchsten bis zur 0ten Höhe hinschreibt. Hinter die Vorzahl von x^0 ſetzt man ein Komma, wenn noch Höhen mit Strichstufen oder mit negativen Exponenten folgen, und nennt dann die Reihe einen **Reihenbruch**.

Ist die Grundzahl 10, ſo heist die Reihenzahl eine **Zehntzahl** (dekadische Systemzahl), der Reihenbruch ein **Zehntbruch** (Decimalbruch).

Beispiel. $5003 = 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^0$; $5{,}003 = 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-3}$.

Man hat verschiedene Zahlen, gewöhnlich 10 zur Grundzahl der Reihenzahlen genommen. Jetzt haben alle Völker die 10 als Grundzahl angenommen, indem ſie ſich an die 10 Finger der Hände angeschlossen haben, welche zum Abzählen benutzt wurden und von Kindern auch jetzt noch benutzt werden. Die Deutschen haben schliesliech noch den Versuch gemacht, über das zehntheilige System hinaus in das zwölftheilige überzugehen, welches zahlreiche Vorzüge beſitzt, da in 12 die Zahlen 2, 3, 4, 6 aufgehen, während in 10 nur 2 und 5 aufgehen; aber der Verſuch ist nicht durchgeführt und muss daher aufgegeben werden.

Namen und Zeichen der 10 Zahlen ſind in der Sprachlehre ausführlich besprochen. Jetzt ſind allgemein die indischen (die ſogenannten arabischen) Ziffern im Gebrauche, und werden nur die Vorzahlen oder Coefficienten als Ziffern geschrieben, die Stufen oder Exponenten von Zehn aber durch die Stelle der Ziffer bezeichnet.

165. In der Reihenzahl bezeichnet die Stelle der Ziffer die Stufe oder den Exponenten der Grundzahl, und zwar bezeichnet die Ziffer a auf der Stelle links neben dem Komma $a \cdot 10^0$ oder die Einer. Die auf der mten Stelle links vom Komma (oder die, welche bis zum Komma m Stellen rechts neben ſich hat) ist $a \cdot 10^m$, die auf der mten Stelle rechts vom Komma ist $a \cdot 10^{-m}$. Die Stellen, wo keine Werthziffer steht, erhalten eine 0. So bezeichnet 0,05 die $5 \cdot 10^{-2}$.

Nach den Stellen theilt man die ganzen Zahlen ein in Einer (erste Stelle, 10^0), in Zehner (zweite Stelle, 10^1), in Hunderte (dritte Stelle, 10^2), in Tauſende (vierte Stelle, 10^3), in Zehntauſende (fünfte Stelle, 10^4) und Hunderttauſende (ſechste Stelle, 10^5). Ist die Reihenzahl noch gröser, ſo theilt man die Zahlen in je 6 Stellen und bezeichnet je 6 Stellen durch einen Strich oben,

z. B. 5'376523. Es heist dann die siebente Stelle oder 10^6 eine Million oder ein Mill, die dreizehnte Stelle oder 10^{12} eine Billion oder ein Bill, 10^{18} eine Trillion oder ein Drill, 10^{24} eine Quadrillion oder ein Vierill, 10^{30} eine Quinquillion oder ein Fünfill, 10^{36} eine Sexillion oder ein Sechsill u. s. w.

Nach den Stellen theilt man die Zehntbrüche (Decimalbrüche) in Zehntel (— erste Stelle, 10^{-1}), in Hundertel (— zweite Stelle, 10^{-2}), in Tausendtel (— dritte Stelle, 10^{-3}), in Milliontel oder Milltel 10^{-6}, in Billiontel oder Billtel 10^{-12} u. s. w.

166. Reihenzahlen der Grundzahl x fügt man zu (addirt man), indem man die entsprechenden Stellen (namentlich das Komma) senkrecht unter einander schreibt und dann, von der niedrigsten Stelle beginnend, sämmtliche Ziffern der gleichen Stellen einander zufügt, und wenn die Summe $ax + b$ ist, wo $b < x$, die b auf die gleiche Stelle setzt, die a aber den Ziffern der nächst höhern Stelle zufügt.

Beweis. Der erste Theil des Satzes folgt unmittelbar aus No. 146. Sei die Stelle nun x^n, und sei die Summe auf der Stelle $ax + b$, wo $b < x$, so ist der Werth dieser Stelle $(ax + b) x^n = ax^{n+1} + bx^n$ (nach No. 148), d. h. die Ziffer b gehört der glei- Stelle x^n an, dagegen ist a bei der nächst höheren Stelle x^{n+1} zuzufügen.

167. Von einer Reihenzahl zieht man eine zweite gleicher Grundzahl x ab, indem man die entsprechenden Stellen unter einander schreibt und, von der niedrigsten Stelle beginnend, auf jeder Stelle die Ziffer der zweiten von der entsprechenden der ersten abzieht, und wenn die Ziffer des Abzugs gröser als die des Vorraths ist, eine Einheit der nächst höhern Stelle borgt und dann abzieht

Beweis. Der erste Theil des Satzes folgt unmittelbar aus No. 147. Sei die Stelle nun x^n, und sei der Rest $ax^n - bx^n$, wo $b > a$, so nimmt man aus der Ziffer c der nächst höheren Stelle des Vorraths eine Einheit fort (so dass also $c - 1$ auf dieser Stelle bleibt) und fügt den Werth dieser Einheit zu ax^n, dann hat man $1 \cdot x^{n+1} + ax^n - bx^n = (x + a - b) x^n$, mithin, da $b < x$, bleibt ein positiver Rest für die Stelle x^n, und da $b > a$, so ist dieser Rest auch kleiner als x, mithin nach No. 164 eine Ziffer, welche in der nten Stelle stehen kann.

168. Eine Reihenzahl vervielfacht oder theilt man mit x^m, indem man das Komma um m Stellen nach rechts oder nach links rückt.

Beweis. Unmittelbar aus No. 148 und 149.

169. Zwei Reihenzahlen gleicher Grundzahl x vervielfacht man, indem man die erste mit der niedrigsten Ziffer und ebenſo der Reihe nach mit jeder Ziffer der zweiten vervielfacht, die Zeuge (Producte) ſo ordnet, dass jedes folgende um eine Stelle weiter nach links rückt und dann die Zeuge zufügt (addirt), die niedrigste Ziffer der Summe erhält die Stellenzahl, welche die Summe ist aus den niedrigsten Stellenzahlen der Fache oder Factoren.

Beweis. Der erste Theil folgt unmittelbar aus No. 150. Die Stellenzahl des Zeuges aus der niedrigsten Ziffer und der ersten Reihenzahl folgt aus No. 168. Jede folgende Ziffer der zweiten Reihenzahl hat die nächst höhere Stelle, alſo hat auch nach No. 168 das Zeug die nächst höhere Stelle und muss alſo um eine Stelle weiter nach links rücken. Das Geſammtzeug endlich ist nach No. 150 die Summe aus allen dieſen Zeugen.

170. Eine Reihenzahl A theilt man durch eine andere B gleicher Baſe x, indem man den Nenner B mit einer Zahl bx^n vervielfacht und dieſes Zeug vom Zähler abzieht, der Art, dass der Rest $A - Bbx^n$ eine Pluszahl ist, kleiner als Bx^n, dass man dann dieſen Rest durch den Nenner in gleicher Weiſe theilt und die erhaltenen Brüche zufügt. Geht der Nenner in den Zähler nicht auf, ſo tritt zu den ganzen Zahlen ein Bruch, dessen Zähler kleiner ist als der Nenner.

Beweis. Der Beweis folgt aus No. 152

171. Reihenbrüche gleicher Grundzahl x theilt man durch einander, indem man denſelben gleichviel Stellen rechts vom Komma giebt und ſie dann wie ganze Zahlen behandelt.

Beweis. Seien Ax^{-m} und Bx^{-n} zwei Reihenbrüche und $n = m + p$, ſo ist

$$\frac{Ax^{-m}}{Bx^{-n}} = \frac{(Ax^p)\,x^{-n}}{Bx^{-n}} = \frac{Ax^p}{B} \qquad \text{(nach No. 49).}$$

172. Einen gewöhnlichen Bruch verwandelt man in einen Reihenbruch, indem man hinter den Zähler ein Komma ſetzt und dann ſoviel Nullen anhängt, als der Reihenbruch Stellen erhalten ſoll, und nun mit dem Nenner nach No. 170 theilt.

Beweis. Unmittelbar aus No. 170.

Anm. Das Erhöhen von Reihenzahlen bietet keine Schwierigkeiten dar; dagegen lassen ſich die besten Weiſen des Tiefens (Radicirens) und des Logens (Logarithmirens) erst in der höhern Formlehre geben und können daher hier übergangen werden. Ebenſo können die unendlichen Reihenbrüche erst bei den unendlichen Reihen ihre Besprechung finden.

D. Eigenschaften der Zehntzahlen.

173. Die Zahlen 2^n und 5^n gehen in jede Zahl auf, in deren n letzte Ziffern ſie aufgehen.

Beweis. Es ſei die Zahl $a \cdot 10^n + b$, wo b die letzten n Ziffern umfasst und 2^n in b c mal aufgeht, ſo ist

$$(a \cdot 10^n + b) : 2^n = a \cdot 10^n : 2^n + b : 2^n \quad \text{(nach No. 59)}$$
$$= a (5 \cdot 2)^n : 2^n + c$$
$$= a \cdot 5^n \cdot 2^n : 2^n + c \quad \text{(nach No. 2)}$$
$$= a \cdot 5^n + c \quad \text{(nach No. 49)},$$

d. h. 2^n geht in die Zahl auf, und ebenſo folgt der Beweis für 5^n.

174. Die Zahlen 3 und 9 gehen in jede Zahl auf, in deren Querſumme ſie aufgehen. Die Querſumme aber ist die Summe ihrer Ziffern ohne Rückſicht auf ihren Werth.

175. Die Zahl 11 geht in jede Zahl auf, bei welcher die Querſumme aus den Ziffern der geraden Stellen, abgezogen von der Querſumme aus den Ziffern der ungeraden Stellen ein Vielfaches von 11 giebt.

176. Die Zahlen 7 bezüglich 13 geben in jede Zahl auf, bei welcher die Zahlen der 4. bis 6., 10. bis 12., 16. bis 18. etc. Stelle, abgezogen von den Zahlen der 1. bis 3., 7. bis 9., 13. bis 15. etc. Stelle ein Vielfaches von 7 bezüglich 13 geben, z. B. bei 378'536'425'386 ist dieſer Rest 119, alſo geht 7 auf, bei 378'536'425'384 ist der Rest 117, alſo geht 13 auf.

Abschnitt 6.

Gleichungen ersten Grades

177. Erklärung. Die Grösse x einer Gleichung, deren Werth gesucht werden soll, heist die Unbekannte, der bestimmte Werth, welcher, statt der Unbekannten eingeführt, der Gleichung genügt, heist eine Wurzel der Gleichung. Hat man die Wurzel gefunden, so sagt man, die Gleichung sei aufgelöst.

Sind n Gleichungen mit n Unbekannten gegeben, so heist die Reihe von n bestimmten Werthen, welche den n Gleichungen genügt, die Wurzelreihe der n Gleichungen.

Aus zwei Gleichungen mit einer Unbekannten eine neue Gleichung ableiten, welche diese Unbekannte nicht enthält, heist die Unbekannte entfernen (eliminiren).

178. Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Seiten der Gleichung mit gleichen Grösen auf gleiche Weise knüpft, namentlich wenn man auf beiden Seiten Gleiches zufügt, Gleiches abzieht, mit Gleichem vervielfacht, durch Gleiches (ungleich Null) theilt, mit Gleichem höht, tieft oder logt.

Beweis. Unmittelbar aus No. 1.

179. Statt auf einer Seite der Gleichung ein Stück zuzufügen oder einen Abzug abzuziehen, kann man auf der andern Seite das Stück abziehen, oder den Abzug zufügen, und

Statt eine Seite mit einem Fache zu vervielfachen oder durch einen Nenner zu theilen, kann man die andere Seite durch das Fach theilen, oder mit dem Nenner vervielfachen, d. h.

wenn $a + c = b$, so $a = b - c$,

wenn $a - c = b$, so $a = b + c$,

wenn $ac = b$, so $a = \frac{b}{c}$,

wenn $\frac{a}{c} = b$, so $a = bc$.

Beweis. Unmittelbar aus No. 178.

180. Ein Glied schafft man von einer Seite weg, indem man es mit dem entgegengeſetzten Zeichen auf die andere Seite der Gleichung stellt.

Ein Fach oder einen Nenner eines Gliedes schafft man weg, indem man alle andern Glieder durch das Fach theilt, oder mit dem Nenner vervielfacht.

Beweis. Unmittelbar aus No. 179.

181. Statt eine Seite der Gleichung zu einer Stufe zu erhöhen oder zu einer Senke zu tiefen, kann man die andere Seite zu der Stufe tiefen oder zu der Senke erhöhen, und

Statt eine Seite der Gleichung mit einer Baſe a zu erhöhen oder nach einer Baſe b zu logen, kann man die andere Seite nach der Baſe a logen oder mit der Baſe b erhöhen, d. h.

$$\text{wenn } a^n = b, \text{ ſo } a = b^{\frac{1}{n}}, \qquad \text{wenn } a^{\frac{1}{n}} = b, \text{ ſo } a = b^n,$$

$$\text{wenn } n^a = b, \text{ ſo } a = \frac{b}{n}, \qquad \text{wenn } \frac{a}{n} = b, \text{ ſo } a = n^b.$$

Beweis. Unmittelbar aus No. 178.

182. Man kann die Vorzeichen aller Glieder einer Gleichung entgegengeſetzt nehmen.

Beweis. Man kann beide Seiten der Gleichung nach No. 178 mit -1 vervielfachen, dann aber werden alle Zeichen entgegengeſetzt (nach No. 34).

183. Wenn beide Seiten der Gleichung Brüche ſind, deren Zähler ungleich Null, ſo kann man beide Brüche umkehren.

Beweis. Es ſei $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ſo ist $1 : \frac{a}{b} = 1 : \frac{c}{d}$ (nach No. 178),

d. h. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (nach No. 53), was zu beweiſen war.

184. **Erklärung.** Eine Gleichung heist **eingerichtet**, wenn ſie die Form einer Höhenreihe hat, in welcher die höchste Höhe das Fach 1 hat, die Glieder mit Höhen von x auf der linken Seite und das Glied ohne x auf der rechten Seite der Gleichung steht (ſie heist auf Null gebracht, wenn alle Glieder auf der einen Seite und 0 auf der andern Seite der Gleichung steht).

Die Gleichung heist **nten Grades**, wenn x^n die höchste Höhe (Potenz) von x ist, ſie heist **ersten Grades**, wenn die linke Seite der eingerichteten Gleichung nur x enthält.

185. **Aufgabe.** Eine Gleichung mit einer Unbekannten x einzurichten.

Auflöſung. Man schafft alle Nenner weg (nach No. 180), löſt

die Klammern auf, welche x enthalten, schafft die Glieder, welche x enthalten, auf die linke, die ohne x auf die rechte Seite, fasst in jedem Gliede die Fache oder Factoren x zu einer Höhe zuſammen, fügt die Glieder, welche gleiche Höhen von x enthalten, in ein Glied, ordnet die Glieder ſo, dass die höchste Höhe von x beginnt und die jedesmal niedere folgt. Ist dann die Vorzahl des ersten Gliedes Null, ſo lasse man dies fort, ist ſie nicht Null, ſo theile man jedes Glied durch dieſelbe, ſo ist die Gleichung eingerichtet.

Beweis. Unmittelbar aus den vorhergehenden Sätzen.

186. Eine Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten ist aufgelöſt, wenn ſie eingerichtet ist.

187. Aufgabe. Aus 2 Gleichungen ersten Grades eine Unbekannte x zu entfernen (eliminiren).

Auflöſung. 1. Vertretungsweiſe: Man löſt die eine Gleichung nach x auf und ſetzt in die andere Gleichung für x den gefundenen Werth.

2. Gleichſetzungsweiſe: Man löſt beide Gleichungen nach x auf und ſetzt die beiden gefundenen Werthe einander gleich.

3. Vervielfachungsweiſe: Man vervielfacht jede Gleichung mit der Vorzahl, welche x in der andern Gleichung hat, dann ſind in beiden Gleichungen die Vorzahlen von x gleich, und zieht man die Gleichungen von einander ab, ſo fallen die Glieder, welche x enthalten, fort.

188. Aufgabe. Drei Gleichungen ersten Grades mit 3 Unbekannten aufzulöſen. Die Gleichungen ſeien

$$a + bx + cy + dz = 0$$
$$a' + b'x + c'y + d'z = 0$$
$$a'' + b''x + c''y + d''z = 0.$$

Auflöſung. Es ist

$$z = -\frac{ab'c'' - ac'b'' + bc'a'' - ba'c'' + ca'b'' - cb'a''}{db'c'' - dc'b'' + bc'd'' - bd'c'' + cd'b'' - cb'd''}.$$

Die Rechnung ergiebt ſich leicht durch die Vervielfachungsweiſe. Bemerkt möge nur werden, dass im Zähler die Plusglieder (poſitiven) die gerade Reihenfolge zeigen, wie ſie die folgende Zeichnung darstellt:

$$\begin{array}{cccccccc} a & \searrow & b & \searrow & c & \searrow & (a) \\ a' & \searrow & b' & \searrow & c' & \searrow & (a') \\ a'' & & b'' & & c'' & & (a''), \end{array}$$

dass die Strichglieder eine einfache Umkehr zeigen, und dass im Nenner statt des Gliedes ohne Unbekannte a die entsprechende Vorzahl von z, d. h. d, erscheint. Vertauscht man die Vorzahlen

b und d, so erhält man x, vertauscht man c und d, so erhält man y.

189. **Aufgabe.** n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten aufzulösen.

Auflösung. Aus n Gleichungen, welche n Unbekannte enthalten, kann man nach No. 187 eine Unbekannte entfernen und erhält n — 1 Gleichungen ohne diese Unbekannte. Ebenso erhält man aus n — m Gleichungen mit n — m Unbekannten (d. h. aus denen bereits m Unbekannte entfernt sind) andere n — m — 1 Gleichungen mit n — m — 1 Unbekannten (d. h. aus denen m + 1 Unbekannte entfernt sind), und zuletzt n — (n — 1), d. h. 1 Gleichung mit einer Unbekannten, d. h. die Gleichung ist nach dieser Unbekannten gelöst. Tauscht man dann die entsprechenden Vorzahlen dieser Unbekannten x_1 mit einer andern Unbekannten x_2, so erhält man die Lösung nach dieser andern Unbekannten und sofort.



Die

Ausenlehre oder Ausdehnungslehre.

Fünftes Buch

der

Formenlehre oder Mathematik

von

Robert Grassmann.

Stettin, 1872.

Druck und Verlag von R. Grassmann.

Einleitung

in die Ausenlehre oder Ausdehnungslehre.

Die Ausenlehre*) oder Ausdehnungslehre ist eine ganz junge Wissenschaft. Die Idee derſelben ist zuerst von Leibnitz angeregt. Er nennt dieſelbe eine geometrische Charakteristik und rühmt von ihr, dass ſie für jede Aufgabe der Raumlehre zugleich Löſung, Zeichnung und Beweis auf einfache Weiſe gebe, dass ſie ebenſo die Bewegungslehre oder Mechanik neu begründe und für die Erforschung des innern Baues der Körper Groses leisten müsse, ja dass ſie auch auf andere Dinge der Ausenwelt die reichsten Anwendungen zulasse.

Nach Leibnitz hat dieſe Idee lange geruht. Erst 1844 hat mein Bruder Hermann Grassmann, von ähnlichen Ideen ausgehend, dieſe Wissenschaft ins Leben gerufen und ihr den Namen Ausdehnungslehre gegeben; derſelbe ist demnach als der eigentliche Begründer dieſer Wissenschaft zu betrachten. Er hat die neue Wissenschaft in zwei Werken dargestellt. Das erste, „die Wissenschaft der extenſiven Gröse oder die Ausdehnungslehre“ 1844, geht von der Idee der Wissenschaft aus und entwickelt aus der Idee die mathematischen Begriffe, das zweite, „die Ausdehnungslehre“ 1862, schreitet in streng mathematischer Weiſe in Formeln vor.

Das vorliegende Werk ist kürzer als die genannten und entwickelt nur die Grundzüge der Wissenschaft, indem es wegen alles Einzelnen ausdrücklich auf das zuletzt genannte Werk verweiſt. Die Grösenlehre und Begriffslehre, die Zahlenlehre und Bindelehre, d. h. die vier ersten Zweige der Formenlehre werden in dieſem Werke vorausgeſetzt und kam es hier gerade darauf an, in dieſem Werke nachzuweiſen, wie alle früheren Zweige in dieſem Zweige der Formenlehre ihren Abschluss und ihre Ergänzung finden. In der Form der Darstellung ist das Werk ſo gehalten, dass es auch ohne die andern Zweige verständlich bleibt. Die griechischen Buchstaben liessen ſich leider in der Ausenlehre nicht ganz vermeiden, die Namen der gebrauchten Buchstaben ſind α álpha, β bêtha, γ gámma, δ délta, $\varkappa$ káppa, λ lámbda, π pî. Möge das kleine Werk denn der neuen Wissenschaft viele Freunde erwerben und ſie zum Studium der grösern Werke anregen.

---

*) Ausen stammt vom alten Formstamme ut, sskr. ut, auf, goth. ût ausen, ahd. uz, nhd. aus, und bezeichnet das auserhalb Befindliche.



Abschnitt 1. Die Grösengebiete.

1. Erklärung.

Die Ausenlehre oder Ausdehnungslehre ist ein Theil der Formenlehre und gelten für dieselbe folgende Erklärungen der Grösenlehre.

Gröse heist jedes, was Gegenstand des Denkens ist oder werden kann, sofern es nur einen und nicht mehre Werthe hat. Das Zeichen der Gröse ist der Buchstabe. Das Zeichen der Zahl ist der griechische Buchstabe. Jeder Buchstabe bezeichnet in derselben Nummer der Ausenlehre stets eine und dieselbe Gröse; im Uebrigen kann jeder Buchstabe jede beliebige Gröse bezeichnen. Ein Satz, der für einen Buchstaben bewiesen ist, gilt mithin für jede Gröse, welche der Buchstabe bezeichnen kann, d. h. für jede beliebige Gröse.

Einheit oder Element heist eine Gröse, welche ursprünglich gesetzt ist und welche also nicht durch Knüpfung andrer Grösen entstanden ist. Der Buchstabe e ist Zeichen der Einheit.

Knüpfung heist jede Zusammenstellung oder Verbindung von Grösen, welche dem Geiste des Menschen möglich ist, sofern sie nur einen und nicht mehre Werthe hat. Dasselbe Knüpfungszeichen bezeichnet in derselben Nummer der Ausenlehre stets eine und dieselbe Knüpfung; im Uebrigen kann jedes Knüpfungszeichen, wenn nichts anderes festgestellt ist, jede beliebige Art der Knüpfung bezeichnen. Ein Satz, der für ein Knüpfungszeichen bewiesen ist, gilt mithin für jede beliebige Art der Knüpfung.

Die Klammer ist das Zeichen, dass die in die Klammer eingeschlossenen Grösen zuvor zu einem Gesammte geknüpft werden sollen, ehe dies mit der Gröse auser der Klammer geknüpft werden darf. Stehen mehre Grösen ohne Klammer, so sollen dieselben fortschreitend geknüpft werden, d. h. es soll zunächst die erste mit der zweiten und dann jedesmal das Gesammt mit der nächstfolgenden Gröse geknüpft werden.

Gleich heisen zwei Grösen, wenn man in jeder Knüpfung der Ausenlehre die eine statt der andern ohne Aenderung des Werthes setzen kann. Das Zeichen der Gleichheit ist $=$.

Ungleich heisen zwei Grösen, wenn man in keiner Knüpfung

der Auſenlehre die eine statt der andern ohne Aenderung des Werthes ſetzen kann. Das Zeichen der Ungleichheit ist $\gtrless$.

In der Knüpfung αa heiſst α die Vorzahl, a die Gröſe, αa das Vielfache von a. In der Knüpfung $\overline{S_{1,n}\alpha_n a_n} = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$ heiſst die Summe die Vielfachenſumme der Gröſen $a_1, a_2 \cdots a_n$. Die Vielfachenſumme der urſprünglichen Einheiten heiſst eine Gröſe erster Stufe.

2. Für die Auſenlehre gelten die Grundformeln und daraus abgeleitet folgende Geſetze der Gröſenlehre. Man kann ohne Aenderung des Werthes

1) jede Plus- und Malklammer beliebig ſetzen oder weglassen und die Ordnung der Stücke beliebig ändern,
2) beim Weben oder Multipliciren jede Beziehungsklammer auflöſen, indem man jedes Stück des einen Faktors mit jedem des andern webt oder multiplicirt.
3) Das Ergebniss jeder dieſer Knüpfungen ist wieder eine Einheitsgröſe, das Zeug oder Product der Einheiten ist wieder eine Einheit.

3. Für die Auſenlehre gelten folgende beſondere Geſetze:

1) die Summe zweier entgegengeſetzter Einheiten e und (− e) ist Null,
2) alle Gröſen, welche durch fortschreitendes Zufügen derſelben Einheit entstanden ſind, ſind einander ungleich,
3) das Zeug oder Product zweier gleichen Einheiten auſer der Eins giebt nicht wieder dieſelbe Einheit. Das Zeug von n verschiedenen urſprünglichen Einheiten heiſst eine Einheit nter Stufe.

Anmerkung. Von dieſen beſondern Geſetzen stimmt das erste und zweite mit den beſondern Geſetzen der Zahlenlehre (No. 3, 1—3), das dritte mit dem zweiten beſondern Geſetze der Bindelehre, und ergeben ſich demnach auch ganz entsprechende Geſetze für die Auſenlehre, wie für jene Zweige.

4. Für die Gröſen der Auſenlehre gelten alle Geſetze der Zahlenlehre über das Zufügen und Abziehen, über das Vervielfachen und Theilen mit Zahlen.

Beweis: Die Gröſen der Auſenlehre ſind entweder Einheiten oder Vielfachenſummen von Einheiten. Für die Einheiten der Auſenlehre gelten nun genau dieſelben Erklärungen nach No. 3, 1 u. 2 wie für die Einheiten der Zahlenlehre No. 3, mithin gelten auch für die Einheiten der Auſenlehre und für die aus ihnen abgeleiteten Vielfachenſummen alle Geſetze, welche in der Zahlenlehre aus dieſen

Erklärungen abgeleitet ſind, d. h. alle Geſetze des Zufügens und Abziehens, alle Geſetze des Vervielfachens und Theilens mit Zahlen.

Anmerkung. Der Ausenlehre eigenthümlich ſind, dass hier verschiedene Einheiten geknüpft werden, ſowie die Geſetze über das Weben oder Multipliciren der Einheiten und Grösen mit Einheiten und Grösen der Ausenlehre.

5. Erklärung. Einander erſetzend heisen zwei Vereine von Gleichungen, wenn ſich jeder von den beiden Vereinen aus dem andern ableiten lässt.

6. Wenn eine Gröse b das Vielfache αa ist einer andern Gröse $a \gtrless 0$, ſo kann man statt $\frac{b}{a}$ die Zahl α ſetzen, oder es ist

$$\frac{\alpha a}{a} = \alpha, \text{ wenn } a \gtrless 0.$$

Beweis: Unmittelbar aus No. 4 und Zahlenlehre No. 49.

7. Wenn zwei Grösen a und b, deren zweite nicht Null ist, Vielfache ſind derſelben dritten Gröse c, ſo kann man statt die erste durch die zweite zu theilen, die Vorzahlen entsprechend theilen oder es ist

$$\frac{\alpha c}{\beta c} = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ wenn } \beta c \gtrless 0.$$

Beweis: Unmittelbar aus No. 4 und Zahlenlehre No. 55.

8. Eine Gleichung, deren Glieder alle Vielfache ſind derſelben Gröse a ungleich Null, wird durch eine Zahlgleichung erſetzt, welche man erhält, indem man in allen Gliedern die Gröse a fortlässt oder

die Gleichung $\alpha a + \beta a + \cdots = \alpha_1 a + \beta_1 a + \cdots$

wird erſetzt durch die Zahlgleichung

$$\alpha + \beta + \cdots = \alpha_1 + \beta_1 + \cdots$$

Beweis: Unmittelbar aus No. 6, wenn man beide Seiten durch $a \gtrless 0$ theilt.

9. Erklärung. Eine Gröse a heist hörig*) zu den Grösen $b_1 \cdots b_n$, wenn ſie ſich als Vielfachenſumme dieſer Grösen darstellen lässt, oder wenn

$$a = S_{1,n}\overline{\beta_a b_a} = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_n b_n.$$

Die Gröse heist frei von den Grösen $b_1 \cdots b_n$, wenn ſie ſich nicht als Vielfachenſumme dieſer Grösen darstellen lässt.

Man ſagt ferner, in einer Grösenreihe herrsche eine Hörig-

*) Hörig stammt vom alten Verk kru, sskr. çru, griech. klý-ō, höre, lat. clu-o, ksl. slu-ti heise, goth. hausjan, an. heyra, ahd. horan, nhd. hören. Hörig ist alſo, was auf einen andern hört, ihm gehorcht, zugehört.

keit oder **Abhängigkeit**, wenn sich irgend eine derselben als Vielfachensumme der andern darstellen lässt. Findet dies nicht Statt, so heist die Reihe eine **freie Grösenreihe**, oder die Grösen **gegenseitig frei**.

Zwei Grösen, ungleich Null, deren eine das Vielfache ist der andern, heisen **deckend** oder **congruent**. Das Zeichen des Deckens ist $\equiv$ z. B. $a \equiv b$.

10. Null ist zu jeder Grösenreihe hörig.

Beweis: Was auch $b_1 b_2 \cdots$ für Grösen sein mögen, so ist

$$0 = S\overline{\beta_a b_a} \text{ wo } \beta_a = 0 \text{ (nach Zahlenlehre No. 2).}$$

11. Eine Gröse, welche zu den Grösen $b_1 \cdots b_n$ hörig ist, vervielfacht oder theilt man mit einer Zahl, indem man die Vorzahlen mit dieser Zahl vervielfacht oder theilt.

Beweis: Es sei $a = S_{1,n}\overline{\beta_a b_a}$ und sei α eine Zahl, so ist

1) $\alpha a = \alpha\,(S_{1,n}\overline{\beta_a b_a}) = S_{1,n}\overline{\alpha\beta_a b_a}$ (nach No. 4 u. Zahlenlehre No. 2).

2) $\frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}a$ (nach No. 4 u. Zahlenlehre No. 42).

$= S_{1,n}\overline{\frac{1}{\alpha}\beta_a b_a}$ (nach No. 11, 1).

$= S_{1,n}\overline{\frac{\beta_a}{\alpha} b_a}$ (nach No. 4 u. Zahlenlehre No. 42).

12. Eine Gröse, welche mit einer zweiten zu denselben Grösen $b_1 \cdots b_n$ hörig ist, fügt man zu oder zieht man ab, indem man die entsprechenden Vorzahlen der Grösen $b_1 \cdots b_n$ zufügt oder abzieht.

Beweis: Es sei $a = S_{1,n}\overline{\alpha_a b_a}$ $c = S_{1,n}\overline{\gamma_a b_a}$, so ist

1) $a + c = S_{1,n}\overline{\alpha_a b_a} + S_{1,n}\overline{\gamma_a b_a} = S_{1,n}\overline{(\alpha_a + \gamma_a) b_a}$ (nach No. 2).

2) $a - c = a + (-c)$ (nach No. 4 u. Zahlenlehre No. 14).

$= a + (-1)c$ (nach No. 4 u. Zahlenlehre No. 34).

$= S_{1,n}\overline{\alpha_a b_a} + (-1)\, S_{1,n}\overline{\gamma_a b_a}$

$= S_{1,n}\overline{\alpha_a b_a} + S_{1,n}\overline{(-1)\gamma_a b_a}$ (nach No. 11).

$= S_{1,n}\overline{[\alpha_a + (-1)\gamma_a] b_a}$ (nach No. 12, 1).

$= S_{1,n}\overline{(\alpha_a - \gamma_a) b_a}$ (nach No. 4 u. Zahlenlehre No. 14 u. 34).

13. Zwischen n Grösen $a_1 \cdots a_n$ herrscht dann und nur dann eine Hörigkeit, wenn sich eine Gleichung

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n = 0$$

aufstellen lässt, in welcher wenigstens eine der Zahlen α_a ungleich Null ist.

Beweis: 1) Wenn in der Gleichung $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n = 0$

auch nur eine der Zahlen z. B. α_1 ungleich Null ist, fo lässt fich die Gleichung durch α_1 theilen und ist

$$a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} a_3 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} a_n \qquad \text{(nach No. 11 u. 12).}$$

2) Wenn eine der Grösen $a_1 \cdots a_n$, z. B. a_1 von den andern hörig ist, fo fei

$$a_1 = \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

fo ist $-a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n = 0$ (nach Zahlenlehre No. 179) und ist alfo mindestens die Vorzahl von a_1 d. h. α_1 ungleich Null.

14. Eine Gröse, welche zu der freien Grösenreihe $b_1 \cdots b_n$ hörig ist, ist dann und nur dann Null, wenn ihre n Vorzahlen Null find oder die Gleichung (a) $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n = 0$, wo $b_1 \cdots b_n$ eine freie Grösenreihe, wird erfetzt durch die n Zahlengleichungen

(b) $\alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = 0, \cdots, \ \alpha_n = 0.$

Beweis: 1) Angenommen, es wäre eine der Vorzahlen ungleich Null, fo würde nach No. 13 zwischen den Grösen $b_1 \cdots b_n$ eine Hörigkeit herrschen, was wider die Vorausfetzung ist. Gilt alfo die Gleichung (a), fo gelten auch die n Gleichungen (b).

2) Umgekehrt, wenn die n Gleichungen (b) gelten, fo folgt daraus auch nach Zahlenlehre No. 2 die Gleichung (a); alfo find beide Vereine von Gleichungen einander erfetzend.

15. Zwei Grösen, welche zu derfelben freien Grösenreihe $c_1 \cdots c_n$ hörig find, find dann und nur dann einander gleich, wenn ihre n zu denfelben freien Grösen gehörigen Vorzahlen einander gleich find oder

die Gleichung (a) $\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_n c_n = \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 + \cdots + \beta_n c_n$, wo $c_1 \cdots c_n$ eine freie Grösenreihe, wird erfetzt durch die n Zahlengleichungen

(b) $\alpha_1 = \beta_1, \ \alpha_2 = \beta_2, \ \cdots, \ \alpha_n = \beta_n.$

Beweis: Aus der Gleichung (a) folgt nach Zahlenlehre No. 179 und Ausenlehre No. 12

$$(\alpha_1 - \beta_1) c_1 + (\alpha_2 - \beta_2) c_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) c_n = 0.$$

Diefe Gleichung aber wird nach No. 14 erfetzt durch die n Gleichungen

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \ \alpha_2 - \beta_2 = 0, \cdots, \ \alpha_n - \beta_n = 0,$$

d. h. nach Zahlenlehre No. 179 durch die n Gleichungen

$$\alpha_1 = \beta_1, \ \alpha_2 = \beta_2, \cdots, \ \alpha_n = \beta_n.$$

16. Jede Gleichung, deren Glieder Vielfache find von Grösen, welche fämmtlich zu der freien Grösenreihe $g_1 \cdots g_n$ hörig find, wird erfetzt durch n Zahlengleichungen, welche man erhält, indem

man statt jeder Gröse ihre zu derfelben freien Gröse g_a gehorige Vorzahl fetzt, oder

die Gleichung (a) $\alpha a + \beta b + \cdots = \varkappa k + \lambda l + \cdots$

in welcher $a = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots + \alpha_n g_n \quad k = \varkappa_1 g_1 + \varkappa_2 g_2 + \cdots + \varkappa_n g_n$

$b = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \cdots + \beta_n g_n \quad l = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n$

$\vdots \qquad \vdots$

wo $g_1 \cdots g_n$ eine freie Grösenreihe ist, wird erfetzt durch die n Zahlengleichungen

$$\text{(b)} \begin{cases} \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \cdots = \varkappa\varkappa_1 + \lambda\lambda_1 + \cdots \\ \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \cdots = \varkappa\varkappa_2 + \lambda\lambda_2 + \cdots \\ \vdots \qquad \vdots \\ \alpha\alpha_n + \beta\beta_n + \cdots = \varkappa\varkappa_n + \lambda\lambda_n + \cdots \end{cases}$$

Beweis: Setzt man in der Gleichung (a) für die Grosen $a\, b \cdots k\, l \cdots$ ihre Werthe, fo erhält man nach No. 11 und 12

$$(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \cdots) g_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \cdots) g_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n + \cdots) g_n$$
$$= (\varkappa\varkappa_1 + \lambda\lambda_1 + \cdots) g_1 + (\varkappa\varkappa_2 + \lambda\lambda_2 + \cdots) g_2 + \cdots + (\varkappa\varkappa_n + \lambda\lambda_n + \cdots) g_n$$

und diefe Gleichung wird nach No. 15 erfetzt durch die n Zahlengleichnngen

$$\begin{aligned} \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \cdots &= \varkappa\varkappa_1 + \lambda\lambda_1 + \cdots \\ \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \cdots &= \varkappa\varkappa_2 + \lambda\lambda_2 + \cdots \\ \vdots \qquad &\quad \vdots \\ \alpha\alpha_n + \beta\beta_n + \cdots &= \varkappa\varkappa_n + \lambda\lambda_n + \cdots \end{aligned}$$

17. Wenn in einer Reihe von Grösen, deren erste ungleich Null ist, jede folgende von allen vorhergehenden frei ist, fo ist die Reihe eine freihe Grösenreihe.

Beweis: Angenommen, die Grösenreihe fei nicht frei, fo herrscht nach No. 9 zwischen den Grösen eine Hörigkeit, und ist alfo nach No. 13 in der Gleichung $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = 0$, wenigstens eine der Vorzahlen α_a ungleich Null. Sei nun α_r die letzte Vorzahl ungleich Nnll, fo kann r entweder gleich 1 oder gröser als 1 fein. Wäre nun $r = 1$, fo wäre $\alpha_1 a_1 = 0$, mithin da $\alpha_1 \gtrless 0$, fo wäre $a_1 = 0$ (nach 4 und Zahlenlehre No. 36), was gegen die Vorausfetzung ist. Wäre aber $r > 1$, fo wäre

$$a_r = -\frac{\alpha_1}{\alpha_r} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_r} a_2 - \cdots - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r} a_{r-1} \qquad \text{(nach No. 11 u. 12)}$$

mithin a_r zu den vorhergehenden Grösen hörig, was wieder gegen die Vorausfetzung ist. Es kann alfo zwischen den Grösen $a_1\, a_2 \cdots a_n$ keine Hörigkeit herrschen.

18. Wenn zwischen n Grösen, welche nicht alle Null find, eine Hörigkeit herrscht, fo lässt fich stets aus ihnen eine freie Grösenreihe ausfondern, zu der die andern Grösen hörig find.

Beweis: Es seien $a_1 \cdots a_n$ die nGrösen, so muss sich nach No. 9 eine als Vielfachensumme der andern darstellen lassen, es sei dies a_n und sei

$$a_n = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_{n-1} a_{n-1}.$$

Herrscht nun zwischen den Grösen $a_1 \cdots a_{n-1}$ abermals eine Hörigkeit, so muss sich nach No. 9 abermals eine als Vielfachensumme der andern darstellen lassen. Es sei dies a_{n-1} und sei

$$a_{n-1} = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_{n-2} a_{n-2}$$

Führt man diesen Ausdruck in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$a_n = (\alpha_1 + \alpha_{n-1}\beta_1) a_1 + (\alpha_2 + \alpha_{n-1}\beta_2) a_2 + \cdots + (\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}\beta_{n-2}) a_{n-2}$$

(nach No. 11 u. 12).

Es ist dann also auch a_n eine Vielfachensumme der Grösen $a_1 \cdot a_{n-2}$.

Auf gleiche Weise ergiebt sich, dass, wenn zwischen den Grösen $a_1 \cdots a_{n-r}$ noch eine Hörigkeit herrscht, man eine derselben als Vielfachensumme der andern darstellen kann, etwa a_{n-r}, und dass, indem man für diese Gröse ihre Vielfachensumme einschiebt, alle bisher als Vielfachensummen der Grösen $a_1 \cdots a_{n-r}$ dargestellten Grösen demnächst Vielfachensummen der Grösen $a_1 \cdots a_{n-r-1}$ werden, bis man zuletzt entweder zu einer freien Grösenreihe, oder zu einer einzigen Gröse a_1 gelangt, von welcher alle andern Grösen Vielfachensummen sind. Im letzten Falle darf wenigstens diese Gröse nicht Null sein, da sonst (nach No. 4 und Zahlenlehre No. 2) alle andern Grösen als Vielfache derselben Null wären, was der Voraussetzung widerstreitet. In jedem Falle gelangt man also zu einer freien Grösenreihe, zu der die andern Grösen hörig sind.

19. Jede Gröse der Ausenlehre lässt sich darstellen in der Form

$$a = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_n b_n,$$

wo $\beta_1 \cdots \beta_n$ Zahlen sind und die Grösen $b_1 \cdots b_n$ eine freie Grösenreihe bilden.

Beweis: In dem Ausdrucke, der a gleich ist, lassen sich nach No. 2 alle Klammern lösen und erscheint mithin die Gröse a als eine Vielfachensumme, in der jedes Glied ein Zeug oder Product ist einer Zahl mit einer Gröse der Ausenlehre. Zwischen diesen Grösen kann nun noch eine Hörigkeit herrschen; entfernt man aber die zu den andern Grösen hörigen in der Weise der No. 18, so bleibt zuletzt a als eine Vielfachensumme übrig, in der auser den Zahlen nur gegenseitig freie Grösen vorkommen.

20. Erklärung. Gebiet*) der Grösen $a_1 \cdots a_n$ heist die Gesammtheit der zu den Grösen $a_1 \cdots a_n$ hörigen Grösen. Gebiet nter Stufe heist ein Gebiet, wenn die Grösen desselben sich als Vielfachensummen von nicht weniger als n gegenseitig freien Grösen erster Stufe darstellen lassen.

Anmerkung. Null ist ein Gebiet nullter Stufe, die Zahlengrösen bilden ein Gebiet erster Stufe.

21. Für die Gebiete der Grösenlehre gelten alle die Sätze der Begriffslehre, welche nur durch Zufügung oder Addition der Begriffe abgeleitet sind.

Beweis: Bei den Gebieten der Grösenlehre ist das Gebiet der Gröse e gleich dem Gebiete der Gröse e + e, oder es ist für die Gebiete Geb. (e + e) = Geb. (e), d. h. es gilt für die Gebiete der Grösenlehre das erste Grundgesetz der Begriffslehre und demnach auch alle aus diesem Grundgesetze abgeleiteten Gesetze der Begriffslehre, welche nur durch Zufügung oder Addition abgeleitet sind.

Dagegen gilt für die Gebiete der Ausenlehre nicht das Gesetz der Verwebung der Begriffe, dass $e \cdot e = e$ und $e_1\ e_2 = 0$ ist, und gelten mithin für die Gebiete der Ausenlehre auch nicht die Gesetze der Begriffslehre, welche durch Verwebung oder Multiplikation abgeleitet sind.

Für die Gebiete der Ausenlehre gelten namentlich folgende Erklärungen und Gesetze der Begriffslehre.

22. Die Summe gleicher Gebiete ist wieder dasselbe Gebiet (nach Begriffslehre No. 6).

23. Die Summe zweier Gebiete ist die Summe sämmtlicher zu den in beiden Gebieten enthaltenen verschiedenen Grösen hörigen Grösen oder

Wenn das Gebiet C die Summe derjenigen Grösen des Gebietes B bezeichnet, welche nicht im Gebiete A enthalten, sondern dem Gebiete B eigenthümlich sind, so ist Geb. (A + B) = Geb. (A + C) und umgekehrt, wenn Geb. (A + B) = Geb (A + C) ist, so sind alle Grösen, welche nicht im Gebiete A enthalten, sondern einem der Gebiete B oder C eigenthümlich sind, sämmtlich den beiden Gebieten B und C gemeinsam (nach Begriffslehre No. 8).

24. Erklärung: Zwei Gebiete der Ausenlehre heisen

a. Deckgebiete oder identische Gebiete, wenn beide

*) Gebiet stammt ab vom alten Verb bhā, sskr. ban, gr. phē-mí, lat. fā-ri spreche, goth. bind-a, bnd-un, ahd. biut-a, nhd. biete. Gebiet ist also der Bezirk, über den jemand gebietet.



einander gleich ſind oder wenn jede Gröse des einen Gebietes auch eine Gröse des andern ist,

b. Ingebiete oder incidente Gebiete, wenn das eine ein Stück des andern ist, oder wenn jede Gröse des Stückes auch eine Gröse der Summe ist. Die Summe heist dann auch das übergeordnete oder weitere Gebiet, das Stück das untergeordnete oder engere Gebiet,

c. Schneidgebiete oder ſecante Gebiete, wenn beide theils gemeinſame Grösen, theils jede eigenthümliche Grösen hat. Die Geſammtheit der gemeinſamen Grösen heist das gemeinſame Gebiet, die Geſammtheit aller Grösen, welche zu den Grösen beider Gebiete hörig ſind, das verbindende Gebiet,

d. Trenngebiete oder disjuncte Gebiete, wenn beide Gebiete keine Gröse gemeinſam haben.

25. Die Summe zweier Deckgebiete (identischer Gebiete) ist dasſelbe Gebiet, die zweier Ingebiete (incidenter Gebiete) ist das übergeordnete Gebiet, die zweier Schneidgebiete (ſecanter Gebiete) ist das verbindende Gebiet, die zweier Trenngebiete (disjuncter Gebiete) ist die Summe aller Grösen, welche zu den Grösen beider Gebiete hörig ſind (nach Begriffslehre No. 13).

26. Bei den Gebieten ist jedes Stück der Summe gleich oder untergeordnet (nach Begriffslehre No. 14).

27. Man kann zu jedem Gebiete ohne Aenderung des Werthes das Deckgebiet oder das untergeordnete Gebiet zufügen oder addiren und

Ein Gebiet, welches zu einem andern zugefügt oder addirt den Werth desſelben nicht ändert, ist dieſem deckend oder untergeordnet oder

$[\text{Geb.}(A) + \text{Geb.}(B) = \text{Geb.}(B)] = [\text{Geb.}(A) \leq \text{Geb.}(B)]$ (Begriffsl. 15).

28. Wenn von zwei Gebieten das erste dem zweiten und zugleich das zweite dem ersten untergeordnet ist, ſo ſind beide Gebiete deckend oder identisch oder

$[\text{Geb.}(A) < \text{Geb.}(B)] + [\text{Geb.}(B) < \text{Geb.}(A)] = [\text{Geb.}(A) = \text{Geb.}(B)]$ (nach Begriffslehre No. 21).

29. Erklärung: Wenn ein Gebiet A die Summe ist zweier Trenngebiete (disjuncter Gebiete) B und C, ſo heist die Summe das Hauptgebiet und ein jedes der beiden Stücke die Ergänzung des andern zum Hauptgebiete.

Die Ergänzung von B zu A wird mit $\bar{B}_A$, geleſen Nicht B zu A, bezeichnet. (Begriffslehre No. 43).

30. Alle Stückgebiete eines Hauptgebietes find dem Hauptgebiete untergeordnet und verändern, zu letzterm gefügt, den Werth desfelben nicht oder

wenn $A \leq H$, fo ist $A + H = H$ (nach Begriffslehre No. 25).

31. Null ist das niedrigste Gebiet, welches allen Gebieten untergeordnet ist, oder was auch A für ein Gebiet fein möge, fo ist

$A + 0 = A$ (nach Begriffslehre No. 26).

32. Die Summe jedes Gebietes und feiner Ergänzung ist der Hauptbegriff oder es ist

$A + \bar{A}_H = H$ (nach Begriffslehre No. 28).

33. Die Ergänzung des Hauptgebietes zum Hauptgebiete ist Null oder es ist

$\bar{H}_H = 0 \quad \bar{0}_H = H$ (Begriffslehre No. 29).

Beweis: Es ist $H + \bar{H}_H = H$ (nach No. 32) und $H + 0 = H$ (nach 31), da nun $\bar{H}_H$ und 0 keine Gröse enthalten, welche in H enthalten find, fo find beide gleich (nach 23).

34. Alle Ergänzungen desfelben Gebietes zu demfelben Hauptgebiete find einander gleich oder für jedes Gebiet giebt es nur eine Ergänzung zu demfelben Hauptgebiete. (Begriffslehre 31).

Beweis: Es feien $\bar{A}_H$ und $\bar{A}'_H$ zwei Ergänzungen des Gebietes A zu H, fo ist $A + \bar{A}_H = H = A + \bar{A}'_H$ (nach 32), da nun $\bar{A}_H$ u. $\bar{A}'_H$ keine Gröse enthalten, welche in A enthalten ist, fo find alle Grösen, welche in einem der Gebiete $\bar{A}_H$ oder $\bar{A}'_H$ enthalten find, nach 23 beiden Gebieten gemeinfam, d. h. es ist $\bar{A}_H = \bar{A}'_H$.

35. Die Ergänzung der Ergänzung eines Gebietes A ist wieder das erste Gebiet A oder

$\bar{\bar{A}} = A$ (Begriffslehre 32).

Beweis: $A + \bar{A} = H = \bar{\bar{A}} + \bar{A}$, mithin $A = \bar{\bar{A}}$.

36. Jedes Gebiet ist der Ergänzung feines Trenngebietes gleich oder untergeordnet und

Wenn ein Gebiet der Ergänzung eines andern gleich oder untergeordnet ist, fo ist es von demfelben getrennt oder disjunct. (Begriffslehre No. 33).

37. Die Ergänzungen von Deckgebieten find deckend oder identisch, die von Ingebieten find Ingebiete und zwar ist die Ergänzung des übergeordneten Gebietes der Ergänzung des untergeordneten untergeordnet oder

$[A = B] = [\bar{A} = \bar{B}]$ und $[A < B] = [\bar{B} < \bar{A}]$ (Begriffsl. No. 35).

38. Wenn die Ergänzung des niedern Gebietes der des höhern

Gebietes untergeordnet ist, fo find beide Gebiete deckend oder identisch oder

$[A < B] + [\overline{A} < \overline{B}] = [A = B]$ (Begriffslehre No. 36).

39. Die Summe der Ergänzungen zweier Trenngebiete ist das Hauptgebiet und umgekehrt, wenn die Summe zweier Gebiete das Hauptgebiet ist, fo find die Ergänzungen der Gebiete Trenngebiete. (Begriffslehre No. 38).

40. Ein Gebiet, das einem zweiten Gebiete und zugleich dessen Ergänzung untergeordnet ist, ist Null und

Ein Gebiet, das einem zweiten Gebiete und zugleich dessen Ergänzung übergeordnet ist, ist das Hauptgebiet oder

$[A < B] + [A < \overline{B}] = [A = 0]$ u. $[A > B] + [A > \overline{B}_H] = [A = H]$ (Begriffslehre No. 39).

41. Für Deckgebiete und für Ingebiete A u. B finden die folgenden vier Gleichungen Statt und, wenn eine diefer Gleichungen Statt findet, fo find die Gebiete deckend oder ingeordnet.

$A \leq B \quad \overline{B} \leq \overline{A} \quad A + B = B \quad \overline{A} + \overline{B} = \overline{A}$ (Begriffsl. No. 40).

42. Für Trenngebiete A u. B finden die folgenden vier Gleichungen Statt und wenn eine diefer Gleichungen Statt findet, fo find die Gebiete getrennt.

$A \leq \overline{B} \quad B \leq \overline{A} \quad A + \overline{B} = \overline{B} \quad \overline{A} + B = \overline{A}$ (Begriffsl. No. 41).

43. Wenn eine Gröse a_1 zu n Grösen $b_1 \cdots b_n$ hörig und die zu b_1 gehörige Vorzahl in dem Ausdrucke für a_1 ungleich Null ist, fo ist das Gebiet der n Grösen $a_1 b_2 \cdots b_n$ gleich oder deckend dem Gebiete der n Grösen $b_1 b_2 \cdots b_n$.

Beweis: Es fei $a_1 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n$, wo $\alpha_1 \gtrless 0$, dann ist

$$b_1 = \frac{1}{\alpha_1} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} b_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} b_n.$$

Dann aber ist auch jede Gröse c des Gebietes $b_1 b_2 \cdots b_n$, z. B.

$$\begin{aligned} c &= \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_n b_n \\ &= \frac{\gamma_1}{\alpha_1} a_1 + \left(\gamma_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) b_2 + \cdots + \left(\gamma_n - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right) b_n, \end{aligned}$$

d. h. auch eine Gröse des Gebietes $a_1 b_2 \cdots b_n$.

Ebenfo ist jede Gröse d des Gebietes $a_1 b_2 \cdots b_n$ z. B.

$$\begin{aligned} d &= \delta_1 a_1 + \delta_2 b_2 + \cdots + \delta_n b_n \\ &= \delta_1 \alpha_1 b_1 + (\delta_2 + \delta_1 \alpha_2) b_2 + \cdots + (\delta_n + \delta_1 \alpha_n) b_n, \end{aligned}$$

d. h. auch eine Gröse des Gebietes $b_1 b_2 \cdots b_n$.

44. Wenn m gegenfeitig freie Grösen $a_1 \cdots a_m$ zu n Grösen $b_1 \cdots b_n$ hörig find, fo kann man zu den m Grösen $a_1 \cdots a_m$ stets noch n—m Grösen $a_{m+1} \cdots a_n$ von der Art hinzufügen, dass die

Grösen $b_1 \cdots b_n$ auch zu $a_1 \cdots a_n$ hörig sind und also das Gebiet der Grösen $a_1 \cdots a_n$ dem der Grösen $b_1 \cdots b_n$ gleich ist, auch kann man jene n − m Grösen aus den Grösen $b_1 \cdots b_n$ selbst entnehmen.

Beweis: 1) Nach der Voraussetzung ist a_1 zu den Grösen $b_1 \cdots b_n$ hörig; es sei also $a_1 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n$, so muss, da $a_1 \gtrless 0$ ist, mindestens eine der Zahlen $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ ungleich Null sein, es sei dies, da die Zeiger vertauschbar sind, α_1, so ist nach No. 43 das Gebiet der Grösen $a_1 b_2 \cdots b_n$ gleich dem Gebiete der Grösen $b_1 \cdots b_n$.

2) Angenommen, es sei das Gebiet der Grösen $a_1 \cdots a_r\, b_{r+1} \cdots b_n$, wo $r < m$, gleich oder deckend dem Gebiete der Grösen $b_1 \cdots b_n$, so muss a_{r+1}, da es nach der Voraussetzung eine Gröse des Gebietes $b_1 \cdots b_n$ ist, nach No. 24 auch eine Gröse des Gebietes $a_1 \cdots a_r b_{r+1} \cdots b_n$ sein. Es sei demnach $a_{r+1} = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_r a_r + \beta_{r+1} b_{r+1} + \cdots + \beta_n b_n$, so muss, da nach der Voraussetzung a_{r+1} frei ist von den Grösen $a_1 \cdots a_r$, mindestens eine der Vorzahlen $\beta_{r+1} \cdots \beta_n$ ungleich Null sein. Es sei also $\beta_{r+1} \gtrless 0$, so ist nach No. 43 das Gebiet der Grösen $a_1 \cdots a_{r+1}\, b_{r+2} \cdots b_n$ gleich oder deckend dem Gebiete der Grösen $b_1 \cdots b_n$. Mithin ist, da das Gebiet der Grösen $a_1 b_2 \cdots b_n$ gleich oder deckend dem der Grösen $b_1 \cdots b_n$ ist, fortleitend auch das Gebiet der Grösen $a_1 \cdots a_m\, b_{m+1} \cdots b_n$ gleich oder deckend dem der Grösen $b_1 \cdots b_n$.

45. Wenn n gegenseitig freie Grösen $a_1 \cdots a_n$ zu n andern Grösen $b_1 \cdots b_n$ hörig sind, so ist das Gebiet der ersten Grösenreihe dem der letztern gleich oder deckend.

Beweis: Unmittelbar aus No. 44, wenn man n statt m setzt

46. Jedes Gebiet nter Stufe kann aus n beliebigen gegenseitig freien Grösen, welche dem Gebiete angehören, abgeleitet werden.

Beweis: Es sei das Gebiet nter Stufe ursprünglich aus den n gegenseitig freien Grösen $a_1 \cdots a_n$ abgeleitet und seien $b_1 \cdots b_n$ beliebige n gegenseitig freie Grösen, welche nach der Voraussetzung zu dem Gebiete der Grösen $a_1 \cdots a_n$ hörig sind, so ist nach No. 45 das Gebiet der ersten Grösenreihe dem der letztern gleich oder deckend.

47. Wenn n Grösen $a_1 \cdots a_n$ einem Gebiete von kleinerer als nter Stufe angehören, so herrscht zwischen ihnen eine Hörigkeit.

Beweis: Es sei das Gebiet, dem die Grösen $a_1 \cdots a_n$ angehören, mter Stufe, wo $m < n$, und sei dies Gebiet zu m Grösen $b_1 \cdots b_m$ hörig. Entweder herrscht nun zwischen den m Grösen $a_1 \cdots a_m$ eine Hörigkeit und gilt also der Satz, oder sie sind gegenseitig frei. In letzterm Falle ist das Gebiet der Grösen $a_1 \cdots a_m$ nach No. 45

dem der Grösen $b_1 \cdot\cdot b_m$ gleich; dann ſind aber auch die Grösen $a_{m+1} \cdot\cdot a_n$ nach No. 46 zu den Grösen $a_1 \cdot\cdot a_m$ hörig und herrscht alſo auch in dieſem Falle zwischen den Grösen $a_1 \cdots a_m$ eine Hörigkeit.

48. Wenn ein Gebiet nter Stufe zu n Grösen erster Stufe hörig ist, ſo ſind dieſe gegenſeitig frei und umgekehrt, wenn n Grösen erster Stufe gegenſeitig frei ſind, ſo ist ihr Gebiet nter Stufe.

Beweis: 1) Herrschte zwischen den n Grösen eine Hörigkeit, ſo liessen ſich einzelne derſelben als Vielfachenſummen der andern, d. h. von weniger als n Grösen darstellen und wäre alſo auch das Gebiet von niederer als nter Stufe (nach No. 20).

2) Wenn die n Grösen erster Stufe gegenſeitig frei ſind, ſo ſind ſie nach No. 47 nicht aus weniger als n Grösen erster Stufe ableitbar, d. h. ihr Gebiet ist nach No. 20 nter Stufe.

49. Erklärung: Zurückleitung der Gröse a auf das Gebiet $a_1 \cdot\cdot a_m$ unter Ausschliesung des Gebietes $a_{m+1} \cdot\cdot a_n$ heist die Gröse $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_m a_m$, wenn die Gröse $a = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n$ ist, wo $a_1 \cdot\cdot a_n$ gegenſeitig freie Grösen und $m < n$ ist. Die Zurückleitungen heisen in demſelben Sinne genommen, wenn die Grösen auf dasſelbe Gebiet unter Ausschliesung desſelben Gebietes zurückgeleitet ſind.

50. Jede Gleichung, deren Glieder Zeuge oder Producte einer Zahl mit einer Gröse der Ausenlehre ſind, bleibt bestehen, wenn man statt aller Grösen der Ausenlehre ihre in demſelben Sinne genommenen Zurückleitungen ſetzt.

Beweis: Die gegebene Gleichung ſei $\alpha a + \beta b + \cdot\cdot = \varkappa k + \lambda l + \cdot\cdot$ in welcher a b ·· k l ·· denſelben Werth haben, wie in No. 16. Dann wird nach No. 16 die obige Gleichung erſetzt durch die n Gleichungen

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \cdot\cdot = \varkappa\varkappa_1 + \lambda\lambda_1 + \cdot\cdot$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\alpha\alpha_n + \beta\beta_n + \cdot\cdot = \varkappa\varkappa_n + \lambda\lambda_n + \cdot\cdot$$

Verwebt oder multiplicirt man nun die ersten m dieſer Gleichungen beziehlich mit $g_1 \cdot\cdot g_m$ und fügt die Gleichungen zu, ſo erhält man

$$\alpha a' + \beta b' + \cdot\cdot = \varkappa k' + \lambda l' + \cdot\cdot$$

wo $a' = \alpha_1 g_1 + \cdot\cdot + \alpha_m g_m \qquad k' = \varkappa_1 g_1 + \cdot\cdot + \varkappa_m g_m$

$b' = \beta_1 g_1 + \cdot\cdot + \beta_m g_m \qquad l' = \lambda_1 g_1 + \cdot\cdot + \lambda_m g_m$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

was zu beweiſen war.

51. Die Stufenzahlen zweier Gebiete m und n ſind zuſammen-

genommen ebenso gros als die Stufenzahlen ihres gemeinschaftlichen r und ihres verbindenden Gebietes v oder es ist

$$m + n = r + v.$$

Beweis: Es sei das Gebiet mter Stufe nach No. 48 das der m gegenseitig freien Grösen $a_1 \cdot\cdot a_m$, das nter das der gegenseitig freien Grösen $b_1 \cdot\cdot b_n$, das gemeinsame rter Stufe das der gegenseitig freien Grösen $c_1 \cdot\cdot c_r$, so ist nach No. 44 das Gebiet der Grösen $c_1 \cdots c_r\ a_{r+1} \cdot\cdot a_m$ dem der Grösen $a_1 \cdots a_n$ und das Gebiet der Grösen $c_1 \cdot\cdot c_r\ b_{r+1} \cdot\cdot b_n$ dem der Grösen $b_1 \cdots b_n$ gleich oder deckend und sind die Grösen $c_1 \cdot\cdot c_r\ a_{r+1} \cdot\cdot a_m$ gegenseitig frei und ebenso die Grösen $c_1 \cdot\cdot c_r\ b_{r+1} \cdot\cdot b_n$.

Das verbindende Gebiet vter Stufe aber ist das Gebiet der Grösen $c_1 \cdot\cdot c_r\ a_{r+1} \cdot\cdot a_m\ b_{r+1} \cdot\cdot b_n$. Angenommen nun, es herrschte hier eine Hörigkeit zwischen den Grösen, so müsste diese die Form haben $a + b + c = 0$, wo a zu $a_{r+1} \cdot\cdot a_m$, b zu $b_{r+1} b_n$, c zu $c_1 \cdot\cdot c_r$ hörig wäre. In dieser Gleichung kann nicht $a = 0$ sein, da sonst $b + c = 0$ wäre, d. h. eine Hörigkeit zwischen den Grösen $c_1 \cdot\cdot c_r\ b_{r+1} \cdot\cdot b_n$ herrschte, ebenso kann nicht $b = 0$ sein. Es wäre also $a = -b - c$, wo $a \gtrless 0$, d. h. es gehörte a einerseits dem Gebiete $a_1 \cdot\cdot a_m$ und zugleich andrerseits dem Gebiete $c_1 \cdot\cdot c_r\ b_{r+1} \cdot\cdot b_n$ an. Zu den Grösen $c_1 \cdot\cdot c_r$ ist es aber nicht hörig, da $c_1 \cdot\cdot c_r\ a_{r+1} \cdot\cdot a_m$ gegenseitig frei, also hätten die beiden Gebiete $a_1 \cdot\cdot a_m$ und $b_1 \cdot\cdot b_n$ auser $c_1 \cdot\cdot c_r$ noch eine von diesen freie Gröse gemein, was wider die Voraussetzung ist. Die Annahme ist mithin falsch, und sind die Grösen $c_1 \cdot\cdot c_r\ a_{r+1} \cdots a_m\ b_{r+1} \cdots b_n$ alle gegenseitig frei, d. h. die Stufenzahl des verbindenden Gebietes v ist nach No. 48

$$v = m + n - r \text{ oder } m + n = r + v.$$

52. Zwei Gebiete mter und nter Stufe, welche in einem Gebiete hter Stufe liegen, haben, wenn $m + n > h$ ist, mindestens ein Gebiet $(m + n - h)$ter Stufe gemein.

Beweis: Sei das verbindende Gebiet vter, das gemeinsame rter Stufe, so ist nach No. 43 $r = m + n - v$, aber $v \leqq h$, da es in dem Gebiete h liegen muss, mithin ist

$$r \gtreqless m + n - h.$$

Abschnitt 2. Die Flache.

53. In der Ausenlehre kann man wie in der Bindelehre zwei Gattungen der Webung oder Multiplication unterscheiden, nämlich:

1) den Geschieden (Complexionen) entsprechend, Producte oder Zeuge, für welche Vertauschung zweier Einheiten gilt,
2) den Geändern (Variationen) entsprechend, Producte oder Zeuge, für welche diese Vertauschung nicht gilt,

und in jeder dieser Gattungen zwei Arten, nämlich

a. den Vollgebinden (Combinationen mit Wiederholung) entsprechend, Producte oder Zeuge, in denen das Zeug zweier gleichen Einheiten ungleich Null ist und
b. den Ausgebinden (Combinationen ohne Wiederholung) entsprechend, Producte oder Zeuge, in denen das Zeug zweier gleichen Einheiten Null ist.

54. Für die erste Art der Webung, welche den Vollgeschieden (Complexionen mit W) entspricht, für welche also Vertauschung zweier Einheiten gilt, und für welche zugleich das Zeug zweier gleichen Einheiten ungleich Null ist, gilt die Grundformel der Verwebung $e_r e_s = e_s e_r$ (Grösenlehre No. 56) und geht daraus das ganze Gesetz der Verwebung (Grösenlehre No. 57) hervor, d. h. man kann in jeder Grösenknüpfung ohne Aenderung des Werthes die Plusklammern und Malklammern beliebig setzen oder weglassen, die Ordnung der Faktoren beliebig ändern und die Beziehungsklammern auflösen, indem man jedes Stück des einen Faktors mit jedem des andern verwebt und die Zeuge zufügt (die Producte addirt).

55. Für die zweite Art der Webung, welche den Ausgeschieden (Complexionen ohne W) entspricht, für welche also Vertauschung zweier Einheiten gilt und für welche zugleich das Zeug zweier gleichen Einheiten Null ist, gilt die Bedingung $e_r e_r = 0$, und, da in der Ausenlehre jede Gröse als Einheit gesetzt werden kann, auch $0 = (e_r + e_s)(e_r + e_s) = e_r e_r + e_r e_s + e_s e_r + e_s e_s$, also da

$$0 = e_r e_r = e_s e_s, \text{ auch } 0 = e_r e_s + e_s e_r.$$

Da nun ferner Vertauschung gilt, so ist $e_r e_s = e_s e_r$ mithin auch

$e_r e_s = 0$, d. h. es werden für diefe Art der Verwebung fämmtliche Zeuge oder Producte Null und fällt diefe Art der Rechnung mithin aus.

56 Für die dritte Art der Webung, welche den Vollgeändern (Variationen mit W) entspricht, für welche alfo nicht Vertauschung gilt und für welche zugleich das Zeug zweier gleichen Einheiten ungleich Null ist, gilt nur die Grundformel der Einwebung (Grösenlehre No. 52) und daraus abgeleitet das Gefetz der Einwebung (Grösenlehre No. 55), d. h. man kann in jeder Grösenknüpfung die Plusklammern und die Malklammern beliebig fetzen oder weglassen und die Beziehungsklammern auflöfen, indem man jedes Stück des einen Faktors mit jedem des andern webt und die Zeuge zufügt (die Producte addirt).

57. Für die vierte Art der Webung, welche den Ausgeändern (Variationen ohne W.) entspricht, für welche alfo nicht Vertauschung gilt, für welche aber das Zeug zweier gleichen Einheiten Null ist, gilt die Grundformel $e_r e_r = 0$ und, da in der Ausenlehre jede Gröse als Einheit gefetzt werden kann, auch $0 = (e_r + e_s)(e_r + e_s)$ $= e_r e_r + e_r e_s + e_s e_r + e_s e_s$, mithin da $0 = e_r e_r = e_s e_s$ auch

$$0 = e_r e_s + e_s e_r.$$

Es bildet diefe Art der Webung oder Multiplication die der Ausenlehre eigenthümliche neu zu behandelnde Verknüpfung, die F l a c h u n g oder combinatorische Multiplication.

58. In jedem Zeuge oder Producte zweier Grösen der Ausenlehre kann man, statt die einzelnen Grösen mit Zahlen zu vielfachen, auch das Zeug der erstern mit dem Zeuge der letztern vielfachen oder es ist

$$(\alpha a)(\beta b) = (\alpha\beta)(ab)$$

B e w e i s: Es ist $(\alpha a)(\beta b) = \alpha(a\beta)b$ (nach No. 2, 1).
$= \alpha(\beta a)b$ (No. 4 u. Zahlenl. No. 2, 1).
$= (\alpha\beta)(ab)$ (nach No. 2, 1).

59. In jedem Zeuge oder Producte mehrer Grösen der Ausenlehre kann man, statt die einzelnen Grösen mit Zahlen zu vielfachen, auch das Zeug der erstern mit dem Zeuge der letztern vielfachen oder es ist

$$P_{\alpha a, \beta b ..} = (\alpha\beta ..) P_{a, b ..}$$

60. In jedem Zeuge oder Producte mehrer Grösen der Ausenlehre kann man die Faktoren, welche Vielfache derfelben Gröse find, ohne Aenderung des Werthes vertauschen oder es ist

$$P_{\alpha a, \beta a ..} = P_{\beta a, \alpha a ..}$$

Beweis: $P_{\alpha a, \beta a} \cdot\cdot = (\alpha\beta \cdot\cdot) P_{a,a} \cdot\cdot$ (nach No. 59).

$= (\beta a \cdot\cdot) P_{a,a}$ (nach Zahlenlehre No. 2, 1).

$= P_{\beta a, \alpha a} \cdot\cdot$ (nach No. 59).

61. Ein Zeug, dessen einer Faktor eine Vielfachenfumme ist, ist gleich einer Vielfachenfumme von entsprechenden Zeugen, welche man erhält, wenn man statt der gegebenen Vielfachenfumme die Stücke fetzt oder

$$P_{\alpha a + \beta b + \cdot\cdot} = \alpha P_a + \beta P_b + \cdot\cdot$$

Beweis: Unmittelbar aus Grösenlehre No. 36 und Ausenlehre No. 59.

62. Erklärung: **Flach*** oder **combinatorisches Product** heist ein Zeug oder Product von Einheiten, die Webung heist **Flachung** oder **combinatorische Multiplication**, wenn

1) jedes Zeug, welches nur verschiedene Einheiten enthält, ungleich Null ist und
2) die Summe zweier Zeuge von Einheiten, welche durch Vertauschung der beiden letzten Einheiten aus einander hervorgehen, Null ist.

Das Zeichen des Flaches ist eine um das Zeug gefetzte Flachklammer, z. B. $[e_r e_s]$.

Zwei Grösen heisen **gleichgeordnet**, wenn in zwei Reihen der Grösen diefelbe Gröse die frühere, fie heisen **entgegengefetzt geordnet**, wenn in der einen Reihe die Gröse die frühere ist, welche in der andern die spätere ist.

63. $[e_1 e_2 e_3 \cdot\cdot] \gtrless 0.$

Jedes Flach, in welchem nur ungleiche Einheiten geflacht find, ist ungleich Null.

64. $[E e_r e_s] + [E e_s e_r] = 0.$

Die Summe zweier Flache von Einheiten, welche aus einander durch Vertauschung der letzten beiden Einheiten hervorgehen, ist Null.

65. $[Abc] + [Acb] = 0$, wo b u. c Grösen erster Stufe.

Man kann in jedem Flache von Grösen erster Stufe die beiden letzten vertauschen, wenn man zugleich das Vorzeichen entgegengefetzt nimmt.

---

*) Flach stammt vom alten Verb spal, sskr. phal spatten, bersten. Davon ist abgeleitet pataka, sskr. phalaka, gr. plák-s, lat planca, Brett, Planke, ahd. flah, nhd. Flach, die Fläche: das auseinander Tretende, fich Ausdehnende.

Beweis: a. Es seien b und c Einheiten. Die Grösse A lässt sich als Zeug von Grösen erster Stufe auf die Form bringen $A = \overline{S\alpha_r E_r}$ wo E_r ein Zeug von Einheiten ist. Führt man diesen Ausdruck ein, so ist

$[Abc]+[Acb]=[\overline{S\alpha_r E_r}bc]+[\overline{S\alpha_r E_r}cb]=\overline{S\alpha_r[E_r bc]}+\overline{S\alpha_r[E_r cb]}$ (nach No. 58).

$=\overline{S\alpha_r([E_r bc]+[E_r cb])}$ (nach No. 2, 2.)

$=\overline{S\alpha_r \cdot 0}=0$ (nach No. 64).

b. Es seien b und c Grösen erster Stufe und sei $b=\overline{S\beta_r e_r}$ und $c=\overline{S\gamma_r e_r}$ so ist

$[Abc]+[Acb]=[A(\overline{S\beta_r e_r})(\overline{S\gamma_r e_r})]+[A(\overline{S\gamma_r e_r})(\overline{S\beta_r e_r})]$

$=\overline{S\beta_r\gamma_s[Ae_r e_s]}+\overline{S\beta_r\gamma_s[Ae_s e_r]}$ (nach No. 59).

$=\overline{S\beta_r\gamma_s([Ae_r e_s]+[Ae_s e_r])}$ (nach No. 2).

$=\overline{S\beta_r\gamma_s\ 0}=0$ (nach No. 65, a.)

66. $[AbcD]+[AcbD]=0$, wo b u. c Grösen erster Stufe.

Man kann in jedem Flache von Grösen erster Stufe beliebige zwei auf einander folgende Grösen vertauschen, wenn man zugleich das Vorzeichen entgegengesetzt nimmt.

Beweis: Es ist $[AbcD]+[AcbD]=([Abc]+[Acb])D$ (n. No. 2, 2.)

$=0\cdot D=0$ (nach No. 65).

67. $P_{a,b}+P_{b,a}=0$ oder $P_{a,b}=-P_{b,a}$.

In jedem Flache von Grösen erster Stufe kann man beliebige zwei Grösen vertauschen, wenn man zugleich das Vorzeichen entgegengesetzt nimmt.

Beweis: Wenn zwischen a und b noch n Grösen erster Stufe stehen: so vertausche man a mit der nächstfolgenden und sofort mit den n + 1 nächstfolgenden, so hat es die Stelle des b; demnächst vertausche man b mit der nächstvorhergehenden und demnächst mit den n vorhergehenden, so hat es die Stelle, welche zuerst a hatte. Im Ganzen sind hiebei zwei auf einander folgende Grösen 2n + 1 mal vertauscht und ist dadurch das Vorzeichen 2 + 1 mal entgegengesetzt geworden und zuletzt entgegengesetzt geblieben, d. h. es ist $P_{a,b}=-P_{b,a}$.

68. $[AB_rC_s]=(-1)^{rs}[AC_sB_r]$,

wo B_r eine Reihe von r, C_s eine Reihe von s Faktoren erster Stufe ist oder

Wenn man in einem Flache von Grösen erster Stufe eine Reihe von r Grösen mit einer unmittelbar darauf folgenden Reihe von

sGrösen vertauscht, ohne im Uebrigen die Folge der Grösen zu ändern, so ist das hervorgehende Flach gleich dem ursprünglichen mal $(-1)^{rs}$.

Beweis: Es sei $C_s = c_1 c_2 \cdots c_s$; rückt man nun c_1 vor B_r, d. h. vertauscht man es mit der nächstvorhergehenden und sofort mit den r vorhergehenden Grösen, so ändert sich das Zeichen r mal und es wird

$$[AB_rC_s] = [AB_rc_1c_2\cdots c_s] = (-1)^r[Ac_1B_rc_2\cdots c_s]$$
$$= (-1)^{2r}[Ac_1c_2B_rc_3\cdots c_s] \text{ etc.}$$
$$= (-1)^{sr}[Ac_1c_2\cdots c_sB_r] = (-1)^{rs}[AC_sB_r]$$

69. $$[A_qB_rC_s] = (-1)^{qr+qs+rs}[C_sB_rA_q]$$

Wenn man in einem Flache von Grösen erster Stufe eine Reihe von qGrösen, welche durch eine Reihe von rGrösen von einer Reihe von sGrösen getrennt sind, mit letzteren vertauscht, so ist das hervorgehende Flach gleich dem ursprünglichen mal $(-1)^{qr+qs+rs}$.

Beweis: Es ist $[A_qB_rC_s] = (-1)^{(q+r)s}[C_sA_qB_r]$ (nach No. 68).
$$= (-1)^{(q+r)s}(-1)^{qr}[C_sB_rA_q] \text{ (n. No. 68).}$$
$$= (-1)^{qr+qs+rs}[C_sB_rA_q].$$

70. $$P = (-1)^r Q,$$

wo P und Q dieselben Faktoren erster Stufe enthalten und r die Anzahl der Grösenpare bezeichnet, welche in P und Q entgegengesetzt geordnet sind oder

Zwei Flache von Grösen erster Stufe, welche dieselben Grösen enthalten, sind einander gleich, wenn eine gerade, einander entgegengesetzt, wenn eine ungerade Anzahl von Grösenparen in beiden Flachen entgegengesetzt geordnet sind.

Beweis: Seien in Q rGrösenpare erster Stufe entgegengesetzt wie in P, so vertausche man jedes dieser rPare, so wird aus Q P, zugleich aber ist bei jedem dieser Tausche das Zeichen nach No. 67 entgegengesetzt geworden, d. h. es ist $P = (-1)^r Q$.

71. $$P_{a,a} = 0.$$

Wenn in einem Flache zwei Faktore gleich sind, so ist das Flach Null.

Beweis: Nach No. 67 ist $P_{a,b} + P_{b,a} = 0$, also wenn a und b gleich sind, so ist

$$0 = P_{a,a} + P_{a,a} = 2P_{a,a}, \text{ d. h. } P_{a,a} = 0.$$

72. Ein Flach von Grösen erster Stufe $[a_1a_2\cdots a_n]$ ist Null, wenn zwischen den Grösen eine Hörigkeit herrscht.

Beweis: Es sei $a_1 = \alpha_2a_2 + \alpha_3a_3 + \cdots + \alpha_na_n$, so ist

$$[a_1 a_2 \cdot\cdot a_n] = [(\alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \cdot\cdot + \alpha_n a_n) a_2 a_3 \cdot\cdot a_n]$$
$$= \alpha_2 [a_2 a_2 a_3 \cdot\cdot a_n] + \alpha_3 [a_3 a_2 a_3 \cdot\cdot a_n] + \cdot\cdot + \alpha_n [a_n a_2 a_3 \cdot\cdot a_n]$$
(nach No. 2 u. No. 58).
$$= \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \cdot\cdot + \alpha_n \cdot 0 = 0$$
(nach No. 71).

73. $$P_{a,b} + \alpha a = P_{a,b}.$$

Ein Flach von Grösen erster Stufe ändert ſeinen Werth nicht, wenn man zu einer Gröse desſelben ein beliebiges Vielfaches einer andern Gröse desſelben zufügt oder addirt.

Beweis: Es ist $P_{a,b} + \alpha a = P_{a,b} + \alpha P_{a,a}$ (nach No. 61).
$= P_{a,b}$ (nach No. 71).

74. Erklärung. **Flachgeschiede** oder **multiplicative Combinationen** zur mten Klasse aus einer Reihe von Grösen heisen die Ausgeschiede (Complexionen ohne Wiederholung) zur mten Klasse aus dieſen Grösen, wenn man jedes Geschiede als ein Flach betrachtet.

Grenze*) oder **Determinante** aus nReihen $\alpha^{(1)} \cdot\cdot \alpha^{(n)}$ von je nZahlen $\alpha_1 \cdot\cdot \alpha_n$ heist der Gliederausdruck, welchen man aus dem Flache $\alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(2)} \cdot\cdot \alpha_n^{(n)}$ dadurch erhält, dass man in ihm nach und nach die untern Zeiger auf alle möglichen Weiſen verſetzt, während man die obern unverändert lässt, dann jedes dieſer Flache mit + bezeichnet, wenn die Anzahl der Zeigerpare, welche unten entgegengeſetzt wie oben geordnet ſind, gerade, mit —, wenn ſie ungerade ist und dieſe ſämmtlichen Glieder zufügt oder addirt.

Das Zeichen der Grenze oder Determinante ist $D\overline{\alpha_1^{(1)}} \overline{\alpha_2^{(2)} \cdot\cdot \alpha_n^{(n)}}$.

75. $$D\overline{\alpha_1^{(1)}}\,\overline{\alpha_2^{(2)} \cdot\cdot \alpha_n^{(n)}} = S\overline{(-1)^u \alpha_r^{(1)}}\,\overline{\alpha_s^{(2)} \cdot\cdot\cdot \alpha_w^{(n)}},$$

wo r, s ·· w den Zahlen 1, 2 ·· n in irgend einer Ordnung genommen gleich ſind und u die Anzahl der Zeigerpare bezeichnet, welche unten entgegengeſetzt wie oben geordnet ſind.

76. $$[S\overline{\alpha_a a_a} \cdot S\overline{\beta_b a_b} \cdot\cdot\cdot] = SD\overline{\alpha_r \beta_s \cdot\cdot} [a_r a_s \cdot\cdot\cdot], \text{ wo } r < s < \cdot\cdot\cdot$$

Jedes Flach von mGrösen erster Stufe, welche zu n gegenſeitig freien Grösen $a_1 \cdot\cdot a_n$ hörig ſind, ist eine Vielfachenſumme der Flachgeschiede (multiplicativen Combinationen) dieſer Grösen zur mten Klasse und zwar ist die Vorzahl jedes Flachgeschiedes die Grenze oder Determinante aus denjenigen mVorzahlen, welche zu den m hörigen Grösen des Flachgeschiedes gehören.

---

*) Grenze stammt vom alten Verb ghar, sskr. har, nehme, fasse ein. Davon ist russ. granizn, poln. granica, böhm. hranice, die Grenze abgeleitet und dies Wort ins Neuhochdeutsche übergewandert, während es im Alt- und Mittel-Hochdeutschen noch fehlt.

Beweis: Es ist $[S\overline{\alpha_a a_a} \cdot S\overline{\beta_b a_b} \cdots] = S\overline{(\alpha_a \beta_b \cdots)[a_a b_b \cdots]}$
(nach No. 2, 2. u. No. 59).

Jedes Flach, in dem zwei Zeiger gleich ſind, ist aber nach No. 71 Null, wir können alſo alle Zeiger a, b·· verschieden nehmen. Es ſeien dieſe Zeiger a, b, c··, nachdem ſie steigend geordnet ſind, r, s, t··, wo alſo $r < s < \cdots$ und ſei u die Anzahl der Zeigerpare, welche in a, b, c·· entgegengeſetzt wie in r, s, t·· geordnet ſind, ſo ist nach No. 70 $[a_a b_b \cdots] = (-1)^u [a_r a_s \cdots]$, wo $r < s < \cdots$. Alſo haben wir

$$[S\overline{\alpha_a a_a} \cdot S\overline{\beta_b a_b}] = S\overline{(-1)^u (\alpha_a \beta_b \cdots)[a_r a_s \cdots]}, \text{ wo } r < s < \cdots$$
$$= SD\overline{\alpha_r \beta_s \cdots}[a_r a_s \cdots], \text{ wo } r < s < \cdots \quad \text{(nach No. 75).}$$

77. $[(\alpha_1^{(1)} a_1 + \cdots + \alpha_n^{(1)} a_n)(\alpha_1^{(2)} a_1 + \cdots + \alpha_n^{(2)} a_n) \cdots (\alpha_1^{(n)} a_1 + \cdots + \alpha_n^{(n)} a_n)] = D\overline{\alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(2)} \cdots \alpha_n^{(n)}} \cdot [a_1 a_2 \cdots a_n]$.

Das Flach von n Grösen erster Stufe, welche zu n gegenſeitig freien Grösen $a_1 \cdots a_n$ hörig ſind, erhält man, indem man aus den n Reihen der je n Vorzahlen die Grenze oder Determinante bildet und dieſe mit dem Flache $[a_1 a_2 \cdots a_n]$ vielfacht.

Beweis: Unmittelbar aus No. 76, wenn man $m = n$ ſetzt und statt $\alpha, \beta, \cdots$ die Zeichen $\alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \cdots$ einführt.

78. Alle Flache, welche demſelben Gebiete nter Stufe angehören, laſſen ſich als Zeuge einer Zahl mit dem Flache der n urſprünglichen Einheiten darstellen.

79. Wenn ein Flach von Grösen erster Stufe Null ist, ſo herrscht zwischen den Grösen eine Hörigkeit.

Beweis: Es ſei $[a_1 a_2 \cdots a_m] = 0$ das gegebene Flach, dessen Grösen $a_1 \cdots a_m$ zu den n Einheiten $e_1 \cdots e_n$ hörig ſeien. Angenommen nun, zwischen den Grösen $a_1 \cdots a_m$ herrschte keine Hörigkeit, ſo könnte man nach No. 44 zu den m Grösen $a_1 \cdots a_m$ noch $n - m$ Grösen $a_{m+1} \cdots a_n$ hinzufügen der Art, dass die Einheiten $e_1 \cdots e_n$ Vielfachenſummen der Grösen $a_1 \cdots a_n$ wären. Führt man dieſe Vielfachenſummen in das Flach $[e_1 e_2 \cdots e_n]$ ein und führt die Rechnung nach No. 77 aus, ſo erhält man eine Gleichung der Form

$$[e_1 e_2 \cdots e_n] = \alpha [a_1 a_2 \cdots a_n], \text{ wo } \alpha \text{ eine Zahl ist,}$$
$$= \alpha [(a_1 a_2 \cdots a_m)(a_{m+1} \cdots a_n)] \quad \text{(nach No. 2, 1.)}$$
$$= \alpha [0 (a_{m+1} \cdots a_n)] = 0 \quad \text{(nach Vorausſetzung).}$$

Dies aber widerstreitet dem Satze No. 63; alſo ist die Annahme unmöglich, d. h. zwischen den Grösen herrscht eine Hörigkeit.

80. Sämmtliche Sätze der Flachung bleiben bestehen, wenn man statt der urſprünglichen n Einheiten beliebige n gegenſeitig freie zu den Einheiten hörige Grösen einführt.

Beweis: Statt der ursprünglichen n Einheiten kann man nach No. 46 beliebige n gegenseitig freie zu den Einheiten hörige Grösen als Einheiten einführen und sind alle Grösen, welche zu den ersten hörig sind, auch zu den letzten hörig. Für die neu eingeführten Grösen gilt ferner wie für die ursprünglichen Einheiten das Gesetz No. 62, dass 1) jedes Zeug, welches nur verschiedene Einheiten enthält, ungleich Null ist, (denn wäre es gleich Null, so müsste nach No. 79 zwischen den Grösen eine Hörigkeit herrschen) und dass 2) $Abc + Acb = 0$ ist, nach No. 65. Es gilt also die Erklärung der Flachung, mithin gelten auch alle Gesetze der Flachung.

81. Die Flachgeschiede (multiplicativen Combinationen) gegenseitig freier Grösen sind auch gegenseitig frei oder

Die Gleichung $\alpha A + \beta B + \cdots = 0$, wo $\alpha, \beta \cdots$ Zahlen, $A, B \cdots$ Flachgeschiede gegenseitig freier Grösen $a_1 \cdots a_n$ sind, wird ersetzt durch die Gleichungsgruppe

$$\alpha = 0, \ \beta = 0, \cdots$$

Beweis: Die Gleichung $\alpha A + \beta B + \cdots = 0$ flache man mit denjenigen der Grösen $a_1 \cdots a_n$, welche in A fehlen, und sei A_1 das Flach dieser Grösen, so dass das Flach $[AA_1] = [a_1 a_2 \cdots a_n]$, dann erhält man $\alpha[AA_1] + \beta[BA_1] + \cdots = 0$.

Hier sind A, B, C verschiedene Geschiede, es müssen also B, C $\cdots$ jede mindestens eine der Grösen enthalten, welche in A fehlt und welche also in A_1 vorkommen. Jedes der Flache $[BA_1]$, $[CA_1]$ enthält also dieselbe Gröse zweimal als Faktor und ist also nach No. 71 Null.

Die obige Gleichung wird also $0 = \alpha[AA_1] = \alpha[a_1 a_2 \cdots a_n]$. Hier ist $[a_1 a_2 \cdots a_n] \gtrless 0$ nach No. 79, also ist $\alpha = 0$ nach Zahlenlehre No. 36. Aus demselben Grunde sind $\beta, \gamma \cdots$ Null, d. h. zwischen den Flachgeschieden herrscht keine Hörigkeit.

82. Zwei Flache von Grösen erster Stufe, welche ungleich Null sind, sind dann und nur dann deckend, wenn die aus ihren Grösen erster Stufe ableitbaren Gebiete deckend sind, oder

$[a_1 a_2 \cdots a_m] \equiv [b_1 b_2 \cdots b_m]$ dann und nur dann, wenn stets

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_m a_m = y_1 b_1 + y_2 b_2 + \cdots + y_m b_m$$

gesetzt werden kann, welche Werthe auch entweder $x_1 \cdots x_m$ oder $y_1 \cdots y_m$ haben mögen.

Beweis: a. Angenommen, es sei das Gebiet $a_1 \cdots a_m$ deckend mit dem Gebiete $b_1 \cdots b_m$. Dann können nach No. 46 die Grösen $a_1 \cdots a_m$ als Vielfachensummen der Grösen $b_1 \cdots b_m$ dargestellt werden und ist dann nach No. 77

$$[a_1 a_2 \cdots a_m] = \alpha[b_1 b_2 \cdots b_m], \text{ wo } \alpha \text{ eine Zahl ist.}$$

Die beiden Flache ſind dann alſo nach No. 9 deckend, d. h. $[a_1 \cdots a_m] \equiv [b_1 \cdots b_m]$.

b. Angenommen, es ſeien die beiden Flache deckend, d. h. $[a_1 \cdots a_m] \equiv [b_1 \cdots b_m]$, dann ist $[a_1 \cdots a_m] = \alpha[b_1 \cdots b_m]$. Flacht man nun beide Seiten mit der Gröse b_1, ſo erhält man

$$[a_1 a_2 \cdots a_m b_1] = \alpha[b_1 b_2 \cdots b_m b_1] = 0 \qquad \text{(nach No. 71).}$$

Alſo herrscht zwischen den Grösen $a_1 a_2 \cdots a_m b_1$ nach No. 79 eine Hörigkeit und da die Grösen $a_1 \cdots a_m$ nach No. 72 gegenſeitig frei ſind, da $[a_1 \cdots a_m] \gtrless 0$, ſo ist b_1 zu den Grösen $a_1 \cdots a_m$ hörig oder eine Vielfachenſumme der letztern. Aus gleichem Grunde ſind aber auch $b_2 \cdots b_m$ zu $a_1 \cdots a_m$ hörig. Da aber $[b_1 \cdots b_m] \gtrless 0$, ſo ſind nach No. 72 die Grösen $b_1 \cdots b_m$ gegenſeitig frei. Wir haben alſo m gegenſeitig freie Grösen, welche zu m andern Grösen $a_1 \cdots a_m$ hörig ſind und ist alſo das Gebiet der erstern Grösen nach No. 45 dem der letztern deckend.

Wegen der weitern Sätze dieſer Wissenschaft verweiſe ich auf die oben angeführten ausführlichen Werke meines Bruders.

Wortverzeichniss.

F bezeichnet die Formenlehre, G die Grösenlehre, Be die Begriffslehre, Bi die Bindelehre, Z die Zahlenlehre und A die Ausenlehre.







